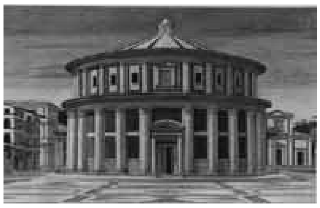
2008 Istituto di Filosofia Arturo Massolo
Università di Urbino
Isonomia



Praeter Quantitatem

Spunti di ricerca per una lettura epistemologica dell'analisi qualitativa in Henri Poincaré[*]

Marco Toscano
Università degli Studi di Bergamo – EHESS Paris
marco.toscano@unibg.it

Abstract

The paper analyzes the epistemological meaning of Poincaré's qualitative approach. Poincaré used this approach in his studies on differential equations and, later, on the three body problem. The development of Poincaré's topological researches will be explained considering two aspects of his scientific journey. The first concerns his deep interest into the three body problem. The second deals with his awareness that such a problem required new mathematical tools, alternative to the classical-quantitative ones in use at that time. This will make it possible to recognize the epistemological influence of Leibniz on Poincaré and to analyze the fundamental role that the Leibnizian thought has played in Poincaré's philosophical education. In conclusion I will also introduce the epistemological meaning of Analysis Situs in Poincaré's thought. The present essay should not be expected to be a complete treatment of these subjects, rather it suggests some, original starting points for new researches on Poincaré's philosophy.

[*] Molte persone hanno contribuito a dar forma alle idee che ho riassunto in questo breve intervento. Un ringraziamento particolare va dunque a: Luciano Boi, Amy Dahan, Enrico Giannetto, Franco Giudice e Corrado Sinigaglia. Ringrazio inoltre tutti i docenti, ricercatori e dottorandi del Ce.R.Co per il clima di vivace discussione del quale mi hanno sempre reso partecipe e che ha contribuito ad alimentare il mio spirito critico. Non c'è bisogno di precisare che la responsabilità di qualsiasi imprecisione o errore è esclusivamente mia.

1. Introduzione

In una delle sue più importanti opere, *Stabilité structurelle et Morphogénèse*[1], René Thom introduce il concetto di analisi qualitativa cercando di sintetizzare, in poche righe, la scarsa considerazione di cui essa gode nella tradizione scientifica classica:

> L'utilizzo del termine qualitativo ha nella scienza – nella fisica soprattutto – un aspetto peggiorativo; e un fisico mi ha ricordato, non senza una certa veemenza – le parole di Rutherford: 'L'accordo qualitativo di una teoria e dell'esperienza non esprime altro che un accordo grossolano (*Qualitative is nothing but poor quantitative*)'.[2]

Tuttavia, nonostante questa pessima reputazione, l'importanza di un approccio qualitativo-geometrico, che passi attraverso una rivalutazione del concetto di *forma*, sembra, se non proprio dimostrabile, quanto meno argomentabile. Thom parla allora di una «tendenza naturale dello spirito a conferire alla forma di una curva un valore intrinseco»[3].

L'obiettivo di questo breve articolo è quello di offrire una panoramica epistemologica dello sviluppo, da parte di Henri Poincaré (1854-1912), di quello che può essere definito un *approccio qualitativo*. Si prenderanno quindi in considerazione i primi lavori di Poincaré sulle equazioni differenziali e il loro legame con i successivi lavori sul problema dei tre corpi. Verrà inoltre messa in evidenza la possibilità di ipotizzare, sul piano epistemologico, un'influenza di Leibniz su Poincaré. In conclusione si preciserà il significato epistemologico che Poincaré attribuisce alla *Analysis Situs* così come esso viene emergendo in alcuni suoi ultimi scritti. In queste poche pagine non si ha la pretesa di offrire una trattazione completa di tali argomenti, (essa costituirebbe un'impresa ben più estesa sia nel tempo che nello spazio). In questo lavoro si vuole piuttosto semplicemente sottolineare la presenza di spunti di ricerca sul pensiero filosofico di Poincaré complementari a quelli seguiti finora, tendenzialmente incentrati sulla spiegazione del convenzionalismo geometrico.

2. L'impiego di un approccio qualitativo

I lavori di Poincaré sulle equazioni differenziali[4], risalenti al periodo 1881-1886, sono solitamente considerati a fondamento del suo successivo interesse per il problema dei tre corpi. Nelle quattro parti di *Sur les courbes définies par une équation différentielle* Poincaré introduce l'utilizzo di un nuovo metodo geometrico nello studio delle curve integrali. Tale metodo costituirà successivamente il cuore teorico dell'approccio innovativo di Poincaré ai problemi di meccanica celeste.

Nella prima parte di *Sur les courbes* (1881) lo studio delle equazioni differenziali viene diviso in due fasi considerate complementari: la prima, *qualitativa*, ha il compito di indagare le curve integrali da un punto di vista geometrico, mettendo in evidenza le loro proprietà formali, la seconda, *quantitativa*, concerne invece il calcolo numerico dei valori della funzione. Citando Sturm[5], Poincaré afferma che l'analisi qualitativa può essere considerata come un primo passo verso quella quantitativa sottolineando anche, però, il ruolo specifico dell'approccio qualitativo:

> D'altra parte, questo studio qualitativo possiede anche di per sé stesso un interesse primario: ad esso si possono infatti ridurre diversi problemi piuttosto importanti di analisi e di meccanica. Consideriamo ad esempio il problema dei tre corpi: non è forse possibile domandarsi se uno dei corpi rimarrà sempre in una certa regione del cielo o se invece potrà allontanarsene indefinitamente? Se la distanza fra i due corpi aumenterà o diminuirà sempre di più, o se invece rimarrà compresa entro certi valori limite? Non è forse possibile porsi migliaia di interrogativi di questo genere, che avranno tutti risposta non appena si sapranno costruire qualitativamente le traiettorie dei tre corpi? E considerando un numero maggiore di corpi, in che cosa consiste il problema dell'invariabilità degli elementi d'orbita dei pianeti se non in un vero e proprio problema di geometria qualitativa, dato che far vedere che l'asse maggiore non subisce variazioni secolari equivale a dimostrare che esso oscilla costantemente fra certi valori limite? Tale è il vasto campo di scoperte che si apre dinnanzi ai geometri.[6]

Poincaré sostiene con argomenti precisi che lo studio qualitativo di una curva integrale presenta degli interessi specifici: esso può essere utilizzato per avvicinarsi a diversi problemi. In particolare egli cita quello dei tre corpi. Come noto, un suo articolo su tale questione verrà presentato solo nel 1889 al premio indetto dal re Oscar II di Svezia, cui seguirà una pubblicazione su *Acta Mathematica* nel 1890[7]. Tuttavia, dal brano sopra citato, emerge come, già nel 1881, lo sviluppo da parte di Poincaré di un approccio qualitativo sia indirizzato a creare un nuovo metodo, di carattere topologico, per affrontare il problema dei tre corpi. Come sottolineato da Ivar Ekeland[8], Poincaré comprende che le orbite dei pianeti non sono fenomeni riducibili all'universo dei calcoli ma, ciò nonostante, appartengono alla matematica. Per questo è però necessario abbandonare l'esclusività dell'approccio quantitativo classico al fine di introdurre un nuovo approccio qualitativo: «È necessario dunque su questa frontiera della conoscenza un cambiamento di ottica. Ai metodi qualitativi, precisi ma limitati, si cerca di supplire attraverso i metodi quantitativi, che conducono più lontano ma danno un'immagine meno distinta»[9].

Nel lavoro di Poincaré, tale cambio di prospettiva non comporta un "fallimento" della scienza. Al contrario, esso introduce un nuovo punto di vista – epistemologico prima ancora che scientifico – attraverso cui spiegare i problemi della meccanica celeste. L'illusione di una perfetta integrabilità delle orbite dei pianeti viene a costituire la prova del riduttivismo intrinseco della scienza classica e del suo tentativo di sciogliere la complessità dei moti celesti attraverso una loro decomposizione in parti semplici[10]. Poincaré, conscio dell'inadeguatezza epistemologica di un tale punto di vista[11], introduce l'approccio qualitativo come strumento attraverso cui aprire una nuova via geometrica nella comprensione dei moti celesti.

La sua analisi delle curve definite da equazioni differenziali è, infatti, di natura topologica e viene solitamente divisa in *analisi qualitativa locale* e *analisi qualitativa globale*[12]. La prima, già presente nella tesi di dottorato di Poincaré e nei lavori di Charles Briot (1817-1882) e Jean-Claude Bouquet[13] (1819-1885), riguarda lo studio del comportamento delle curve integrali in prossimità di un punto singolare. Esso può essere: un *nodo*, un *centro*, un *punto di sella* o un *fuoco*[14]. Al contrario, l'analisi qualitativa globale studia il comportamento delle curve integrali su tutta l'estensione del loro spazio delle fasi (nel caso di Poincaré si tratta di uno spazio delle fasi a due dimensioni); con essa Poincaré getta le basi di un nuovo ambito di ricerca, introducendo fra l'altro concetti fondamentali come quelli di *punto conseguente* e *superficie senza contatto*. Il risultato topologico più rilevante a cui Poincaré perviene è la dimostrazione che ogni curva che non termina in un punto singolare è un ciclo limite o una curva che si arrotola asintoticamente attorno a un ciclo limite.

Sebbene però lo studio di Poincaré delle curve integrali sia essenzialmente di carattere topologico, solo molto più tardi egli si dedicherà esplicitamente alla topologia. Chiamata da Poincaré *Analysis Situs*, essa sarà infatti oggetto di un'opera monumentale che vedrà la sua pubblicazione tra il 1895 e il 1904[15]. Tuttavia, nella sua *Analyse de ses travaux scientifiques faite par H. Poincaré*[16] (risalente al 1901 ma pubblicata nel 1921) Poincaré afferma, a proposito dei suoi interessi per la topologia:

> Per quel che mi riguarda, tutte le diverse strade che via via imboccavo mi conducevano all'analysis situs. Avevo bisogno dei risultati di questa disciplina per proseguire i miei studi sulle curve definite da equazioni differenziali e per estenderli alle equazioni differenziali di ordine superiore e in particolare a quelle relative al problema dei tre corpi.[17]

Sono dunque le differenti ricerche che Poincaré conduce a portarlo alla *Analisys Situs*. Questa disciplina gli è necessaria per proseguire i suoi studi sulle equazioni differenziali e per estenderli al problema dei tre corpi. L'interesse "fisico" per tale problema appare, da subito, come uno degli obiettivi in vista dei quali Poincaré sviluppa un approccio qualitativo. La topologia e l'analisi qualitativa a essa collegata non sono solo strumenti teorici e matematici: in Poincaré esse sono soprattutto nuove strutture epistemologiche – alternative a quelle classiche – attraverso cui comprendere la complessità dei moti celesti. È quindi possibile concludere che i primi interessi di Poincaré verso la topologia si fondino sul suo tentativo di creare un nuovo metodo per risolvere il problema dei tre corpi e la spinosa questione della stabilità del sistema solare.

Come sottolinea Ekeland, Poincaré non crede a un mondo «completamente integrabile»[18] e, sebbene sia un maestro nell'utilizzo dei metodi quantitativi, si dimostra pienamente consapevole dei loro limiti tecnici ed epistemologici. Egli crea infatti una nuova prospettiva aprendo, come evidenzia Weierstrass[19] (1815-1897), una nuova era della meccanica celeste.

3. L'influenza di Leibniz?

Da un punto di vista filosofico il ruolo che l'approccio qualitativo e la topologia giocano in Poincaré può essere compreso in senso più ampio: attraverso di essi è infatti possibile tracciare un legame epistemologico tra Poincaré e Leibniz (1646-1716).

In una lettera che scrive all'amico Christiaan Huyghens (1629-1695) nel 1679 Leibniz introduce, per la prima volta, l'idea di un'analisi qualitativa. Egli dichiara, infatti, la necessità di andare oltre l'analisi algebrica della *magnitudo*:

> Nonostante tutto il progresso che ho fatto in questi ambiti, non sono ancora soddisfatto dell'algebra, poiché essa non fornisce né i metodi più rapidi, né le più belle costruzioni della geometria. Per questo credo, per quanto riguarda quest'ultima, che ci serva un altro tipo di analisi, strettamente geometrica e lineare, che esprima la posizione [situm] esplicitamente così come l'algebra esprime esplicitamente la grandezza.[20]

Dalla necessità di trovare una nuova via matematica in grado di esprimere le proprietà che non concernono la quantità ma la qualità, Leibniz ricava l'importanza di una nuova disciplina riguardante il *situs*: un ramo della matematica attraverso cui studiare le proprietà qualitative e formali. In un breve *essay* intitolato *De Analysis Situs*, Leibniz scrive inoltre: «In generale, la Figura, prima della Quantità, possiede la Qualità ovvero la Forma»[21] e riguardo a una nuova disciplina qualitativa scrive: «Mi piace chiamarla Analysis Situs, poiché essa esprime direttamente e immediatamente la posizione così che le figure, sebbene non siano tracciate, sono disegnate nella mente […]»[22]. Leibniz sottolinea anche l'importanza in questa nuova disciplina della *similitudine* come alternativa all'*uguaglianza* (o *equivalenza*). Due figure, dice infatti Leibniz, sono uguali quando la loro «magnitudo» è la stessa (di conseguenza l'uguaglianza è connessa con la quantità); al contrario, due figure sono *simili* quando la loro «forma» è la stessa. Il concetto di forma viene quindi qui compreso in un senso profondo e rappresenta, in una figura, il reciproco posizionamento delle parti o, in altre parole, il loro *situs*. Alla luce di questa idea Leibniz riconosce l'esistenza di proprietà matematiche non connesse alla *magnitudo* o, in generale, alla quantità. Egli specifica infatti che la qualità (o forma) viene prima della quantità: essa esprime proprietà fondamentali delle figure. Laurence Bouquiaux osserva infatti:

> Leibniz intende rifiutare la dittatura del quantitativo, senza per questo abbandonare la fisica matematica [...]. La matematica che progetta Leibniz – e in certa misura costruisce – è qualcosa come la Mathesis Universalis di cui parla Descartes, qualcosa che supera la matematica cartesiana. È già anche la nostra matematica. Questa *mathesis* non si riduce all'algebra, che tratta della quantità in generale. Essa concerne tutto ciò che cade nel dominio dell'immaginazione per quanto ciò sia conosciuto distintamente. Essa non tratta solamente la quantità ma anche la disposizione delle cose. La nozione di ordine, benché sia

> qualitativa è, per Leibniz, matematica. [...] La verità di una figura risiede nel suo aspetto qualitativo più che nel suo aspetto quantitativo.[23]

In linea con questa prospettiva, la forma, lungi dal ridursi all'aspetto superficiale delle cose, ne diviene invece l'essenza. Anche le critiche di Leibniz a Descartes possono essere comprese in quest'ottica[24]. Leibniz sottolinea l'importanza di una fisica globale[25] in cui ogni parte venga considerata in relazione alle altre; così, attraverso un'analisi delle posizioni (*situs*), ogni parte si contraddistingue all'interno di un universo concepito come una unità armoniosa.

Sono proprio le critiche di Leibniz alla meccanica cartesiana a costituire il più evidente punto di contatto con Poincaré. Nel 1880 Poincaré scrive una postfazione all'edizione della *Monadologie* curata da Emile Boutroux in cui spiega la differenza tra la conservazione della quantità di moto in Descartes e la conservazione dell'energia cinetica in Leibniz[26].

Poincaré mostra brevemente come il sistema meccanico di Leibniz si distingua da quello di Descartes per la sua intrinseca unità e per il reciproco relazionarsi delle sue parti. In esso, ogni cambiamento di una parte corrisponde a un conseguente cambiamento nelle altre[27] e da esse si distingue in funzione della sua posizione relativa. Come annota Poincaré: «È necessario dunque che ci sia una certa armonia nei fenomeni meccanici che riguardano le diverse parti di un sistema»[28]. È possibile comprendere una tale armonia partendo da una visione meccanica differente da quella cartesiana (e newtoniana). Il ruolo della *relazione* in Leibniz e l'importanza delle proprietà a essa connesse sono elementi ben chiari a Poincaré. Non sappiamo se egli conosca o abbia letto la lettera a Huygens e se sia dunque possibile concludere un'influenza diretta di Leibniz. Da un punto di vista storico, una tale assunzione costituirebbe un errore. La nascita dell'interesse di Poincaré per l'*Analysis Situs* è infatti ascrivibile sia, come visto, al suo tentativo di trovare un nuovo metodo per affrontare il problema dei tre corpi, sia all'influenza che esercitarono sulla sua formazione matematica i lavori di Riemann e Betti (così come le riflessioni sulla nozione di gruppo a partire dal *Programma di Erlangen* di Felix Klein e dai lavori di Sophus Lie). Tuttavia, Poincaré dedica il suo primo scritto epistemologico a Leibniz, mostrando una solida conoscenza della sua filosofia della natura (e delle differenze che la distinguono da quella cartesiana). Tale filosofia è parte della formazione epistemologica di Poincaré e contribuisce alla costruzione del suo pensiero filosofico. In questo senso è possibile tratteggiare un sottile legame epistemologico tra Leibniz e Poincaré, collocando entrambi in una comune visione in cui *forma* e *relazione* assumono un'importanza esplicita.

4. Il significato epistemologico dell'*Analysis Situs*

È interessante cercare di chiarire che tipo di significato epistemologico Poincaré attribuisca alla topologia. Egli definisce la topologia come: «La scienza che ci fa conoscere le proprietà qualitative delle figure geometriche [..]»[29]. Poincaré enfatizza l'importanza di una trattazione matematica delle proprietà qualitative e in un testo pubblicato postumo, *Pourquoi l'espace a trois dimensions*[30], afferma l'esistenza, accanto a quella metrica e proiettiva, di un terzo tipo di geometria, l'*Analysis Situs*, in cui:

> La quantità è completamente bandita e che è puramente qualitativa [...]. In questa disciplina, due figure sono equivalenti tutte le volte che possiamo passare dall'una all'altra attraverso una deformazione continua, qualunque sia la legge di questa deformazione a patto che rispetti la continuità [...]. Dal punto di vista della geometria metrica, da quello stesso della geometria proiettiva, le due figure non sono equivalenti, esse lo sono al contrario dal punto di vista dell'Analysis Situs.[31]

In questo passaggio, Poincaré sottolinea l'essenza qualitativa della topologia: gli oggetti di studio di tale scienza sono infatti gruppi di trasformazioni continue[32]. Da un punto di vista topologico, due figure sono uguali se è possibile passare dall'una all'altra attraverso una trasformazione continua che preservi l'ordine delle parti. La nozione di "continuo" è considerata da Poincaré come fondamento della topologia e compito di tale disciplina è proprio quello di offrire un'analisi matematica di tale *continuum*. Come sottolinea Gregory Nowak[33], la topologia è, per Poincaré, «la matematica del continuo»[34], in cui il "continuo" deve essere compreso in tutta la sua ricchezza intuitiva; proprio in questa ricchezza è possibile trovare le proprietà qualitative che l'approccio quantitativo tende a ignorare. Secondo Nowak, il continuo intuitivo, opposto alla *Zahlenmannigfaltigkeit* di Sophus Lie, rappresenta per Poincaré l'esempio di un oggetto matematico malamente espresso dalla sua definizione quantitativa. Circa la definizione del continuo a tre dimensioni[35], Poincaré scrive:

> Questa definizione svende l'origine intuitiva della nozione di continuo e di tutta la ricchezza che riguarda queste nozione. Essa rientra nel tipo di quelle definizioni che sono divenute così frequenti in Matematica da quando si è teso ad 'aritmetizzare' questa scienza. Queste definizioni, irreprensibili, si è detto, da un punto di vista matematico, non sanno soddisfare il filosofo. Esse rimpiazzano l'oggetto da definire e la nozione intuitiva di questo oggetto con una costruzione fatta con materiali più semplici; è ben chiaro che si può fare una tale costruzione con questi elementi, ma è allo stesso tempo chiaro che potremmo farne molte altre; ciò che non si vede è la ragione profonda per cui si assemblano questi elementi in un tal modo e non in un altro. Non voglio dire che questa 'aritmetizzazione' delle matematiche sia una cosa dannosa, dico solo che non è tutto.[36]

Poincaré sottolinea anche che l'*Analysis Situs* è la disciplina matematica in cui l'intuizione geometrica è realmente impiegata e specifica la differenza intrinseca tra questo tipo di intuizione e quella aritmetica o algebrica[37]: solo attraverso l'intuizione geometrica è infatti possibile comprendere «la ragione profonda per cui si assemblano questi elementi in un tal modo e non in un altro»[38]. L'essenza del continuo deve essere trovata in una connessione interna tra le parti che la definizione analitica non esprime in modo adeguato. L'intuizione geometrica, invece, è l'intuizione dell'*ordine*[39]. Nello spazio topologico amorfo, le uniche proprietà sono quelle qualitative che dipendono dalla conservazione dell'ordine. Poincaré considera questo aspetto qualitativo la base di ogni tipo di geometria e ritiene che esso debba essere considerato come il contenuto intuitivo ed essenziale del continuo. La geometria metrica e quella proiettiva hanno a che vedere con proprietà che dipendono dall'introduzione di strumenti di misura in uno spazio amorfo. Tale spazio include proprietà qualitative, intelligibili attraverso l'uso di un'autentica intuizione geometrica, che l'approccio quantitativo non riesce a cogliere. Alla luce di ciò, come sottolinea Nowak, è possibile comprendere la critica di Poincaré alla *Zahlenmannigfaltigkeit* di Lie[40]: essa rappresenta, per Poincaré, una struttura costruita sul continuo topologico. Considerare la *Zahlenmannigfaltigkeit* come equivalente al continuo intuitivo costituisce un'imprecisione sia matematica che epistemologica: matematica poiché conduce a ignorare le proprietà matematiche del continuo; epistemologica perché implica la sottovalutazione del ruolo dell'intuizione geometrica. La ricchezza intuitiva del continuo può essere colta in modo adeguato solo ponendo l'accento sull'ordine delle parti, di cui il continuo costituisce la possibilità stessa.

La topologia – o *Analysis Situs* – è una disciplina, prima in Leibniz e poi in Poincaré, che studia le proprietà connesse alla posizione, considerata come relazione tra le parti. La "forma" come espressione di una relazione è latrice di proprietà specifiche, impossibili da cogliere con gli strumenti dell'approccio quantitativo[41].

Nel suo studio delle curve integrali Poincaré si interessa alla loro forma perché comprende che essa contiene delle specifiche proprietà qualitative. Nello stesso modo, egli intuisce che lo stesso punto di vista può essere adatto ad affrontare il problema dei tre corpi. Egli sviluppa quindi gli strumenti dell'approccio qualitativo al fine di risolvere la spinosa questione della stabilità del sistema solare, riconoscendo inoltre i limiti sia tecnici che epistemologici dell'approccio analitico. Sul piano epistemologico, l'*Analysis Situs* è per Poincaré la scienza che si concentra sulle relazioni tra le parti, vale a dire sul loro ordine. Il continuo amorfo non possiede proprietà metriche o proiettive di alcun genere, ma quelle proprietà che dipendono dagli assiomi dell'ordine e mentre gli assiomi della geometria possono essere considerati come convenzioni giustificate, gli assiomi dell'ordine devono essere considerati diversamente: «Per gli assiomi dell'ordine mi sembra che ci sia qualcosa in più, essi sono delle vere proposizioni intuitive che si ricollegano all'Analysis Situs»[42]. Le proprietà qualitative dell'ordine vengono infatti, per Poincaré, prima di ogni tipo di convenzione e concernono l'intuizione del continuo. Per questo, l'introduzione di un approccio qualitativo coincide, nel suo pensiero, con la riabilitazione dell'intuizione geometrica.

5. Osservazioni conclusive

Gli studi di Poincaré sulle curve integrali contribuiscono ad aprire un nuovo ramo matematico dell'analisi, quello qualitativo. In esso l'attenzione è focalizzata sulle proprietà topologiche delle curve e la nozione di *forma* diventa centrale. Questo nuovo metodo geometrico per studiare le equazioni differenziali sembra motivato, in Poincaré, dal suo interesse *fisico* per il problema dei tre corpi. In diverse occasioni, negli articoli pubblicati tra il 1881 e il 1886 e più tardi nella *Analyse de ses travaux scientifique*, Poincaré sottolinea l'applicabilità dei nuovi risultati topologici al problema dei tre corpi. Nello specifico, egli sottolinea la possibilità di dare una risposta alla questione riguardante la stabilità del sistema solare. Poincaré è inoltre consapevole dell'intrinseca limitatezza dell'analisi quantitativa e contribuisce, con l'analisi qualitativa, ad allargare i confini della matematica, andando, sia scientificamente che epistemologicamente, oltre i metodi quantitativi.

Da un punto di vista storico non vi sono, attualmente, prove esplicite di una diretta influenza del pensiero di Leibniz su Poincaré e l'avvicinamento di quest'ultimo all'*Analysis Situs* deve essere spiegato tenendo conto del contesto matematico dell'epoca (in particolare l'influenza di Riemann e Betti). Tuttavia, le ragioni epistemologiche alla base dell'*Analysis Situs* (l'importanza di proprietà qualitative, vale a dire, l'importanza della *relazione*), sembrano essere molto simili in Leibniz e Poincaré. Inoltre la postfazione alla *Monadologie* rivela il ruolo rilevante giocato da Leibniz negli interessi filosofici di Poincaré. Egli riconosce certamente la posizione primaria, nel pensiero di Leibniz, della nozione di relazione, comprendendo anche come essa sia essenziale per spiegare la solidarietà delle diverse parti dell'universo e la conseguente armonia universale; aspetti che saranno successivamente presenti anche negli scritti epistemologici di Poincaré. La necessità di fondare un nuovo ambito matematico dedicato allo studio di aspetti qualitativi emerge inoltre, tanto in Leibniz quanto in Poincaré, come un allargamento necessario dei confini della matematica. Sarebbe scorretto, per questo, cercare di considerare Leibniz come un predecessore di Poincaré ma, di contro, non è possibile non considerare la filosofia di Leibniz come parte integrante della formazione di Poincaré.

In ultimo, come osserva Jean Petitot[43], l'interesse del ventesimo secolo verso la forma corrisponde al tentativo di sviluppare «una teoria oggettiva delle forme» connessa a una nuova «ontologia qualitativa» di stampo aristotelico. La scienza classica, nella lettura di Petitot, non riconosce alcun tipo di oggettività alla forma: essa è considerata solo dal punto di vista soggettivo dagli approcci psicologici e fenomenologici. L'approccio qualitativo di Poincaré sembra invece essere in contrasto con la tradizione classica: la forma non è esclusa dalla matematica, al contrario essa diventa un nuovo oggetto matematico.

Una lettura epistemologica stimolante del nuovo approccio qualitativo è offerta da René Thom[44]. Egli ritiene che la scienza classica riservi, alla sua nascita, un posto speciale alla «causa efficiente» rifiutando del tutto la «causa formale»[45]. Questo aspetto corrisponde, nella prospettiva di Thom, a una sorta di essenza antropocentrica della scienza classica che trova espressione nell'introduzione della nozione di *forza*. Secondo Thom, infatti, ci sarebbe la tendenza a dare alla nozione di forza uno statuto ontologico più profondo di quello attribuito alla *forma* e ciò deriverebbe dal fatto che l'uomo agisce sugli oggetti esterni attraverso delle forze muscolari che esercita su di essi. Tuttavia rispetto alla *forza*, Thom considera più sottile e feconda la nozione di *forma*. Il significato ontologico della forma corrisponde alla sua attitudine a offrire una prospettiva globale dei fenomeni fisici. Al contrario, le relazioni tra le parti sono del tutto escluse nella costruzione di una «natura automata»[46]. L'importanza che Petitot e Thom attribuiscono alla forma non ha forse trovato un reale riscontro nella scienza contemporanea, la quale resta dunque lontana dall'essere fondata su una «ontologia qualitativa aristotelica». Ciò non toglie che la scienza, intesa come prodotto della cultura umana, non può essere valutata in modo univoco. Vi sono infatti differenti correnti che si affiancano, entrando a volte in competizione, dietro le quali si nascondono diverse considerazioni epistemologiche. L'approccio qualitativo appare come una nuova prospettiva attraverso cui è possibile allargare i confini dei metodi quantitativi, in senso sia matematico che epistemologico. È in questo senso che si crede debba essere letto l'approccio qualitativo di Poincaré, come una parte (sebbene forse non quella vincente) della conoscenza scientifica.

Bibliografia Essenziale

Aiton, E., 1985, *Leibniz: A Biography*, Bristol, Hilger (*Leibniz*, trad. it. a cura di M. Mugnai, Milano, Il Saggiatore 1991).

Barrow-Green, J., 1994, «Oscar II's prize competition and the error in Poincaré's Memoir on the three body problem», in *Archive for history of exact sciences*, 48, pp. 107-131.

—, 1997, *Poincaré and the three body problem*, Providence, American Mathematical Society-London American Society.

—, 2005, «Henri Poincaré, memoir on the three body problem», in *Landmark Writings in Western Mathematics 1640-1940*, a cura di I. Grattan-Guinnes, R. Cooke, Amsterdam, Elsevier, pp. 627-638.

Bartocci, C., 1995, «Equazioni e orbite celesti: gli albori della dinamica topologica», in J. H. Poincaré, 1995, *Geometria e Caso*, a cura di C. Bartocci, Torino, Bollati Boringhieri, pp. VII-L.

Belaval, Y., 1960, *Leibniz critique de Descartes*, Paris, Gallimard.

Boi, L., 1996, «La conception qualitative des mathématiques et le statut épistémologique du concept de groupe», in *Henri Poincaré. Science et philosophie*, a cura di J. L. Greffe, G. Heinzmann, K. Lorenz, Berlin-Paris, Akademie-Blanchard, pp. 315-329.

Bouquiaux, L., 1994, *L'harmonie et le chaos. Le rationalisme leibnizien et la nouvelle science*, Louvain-La-Neuve, Paris, Editions de l'institut supérieur de philosophie.

Bouquet, J. C., Briot C., 1878, «Note sur les propriétés des fonctions définies par les équations différentielles», in *Journal de l' Ecole Polytechnique*, cahier XLV, pp.13-26.

Boutot A., 1993, *L'invention des formes*, Paris, Editions Odile Jacob.

Chabert, J. L., Dahan Dalmedico, A., 1992, «Les idées nouvelles de Poincaré», in *Chaos et déterminisme*, a cura di J. L. Chabert, A. Dahan Dalmedico, Paris, Seuil, pp. 274-305.

Duchensneau, F., 1994, *La dynamique de Leibniz*, Paris, Vrin.

Ekeland, I., 1984, *Le Calcul, l'Imprevu, les figures du temps de Kepler* à *Thom*, Paris, Seuil.

—, 2000, *Le meilleur des mondes possibles*, Paris, Seuil.

Enriques, F., 1904, *Lezioni di Geometria Proiettiva*, Bologna, Zanichelli, (seconda edizione ampliata).

Galison, P., 2003, *Einstein's clocks, Poincaré's maps: Empires of Time*, New York, Norton and Company.

Giannetto, E. R. A., 2004, *Saggi di Storie del Pensiero Scientifico*, Bergamo, Bergamo University Press.

Giedymin, J., 1977, «On the origin and significance of Poincaré's conventonalism», in *Studies in History and Philosophy of Science*, 8, n. 4, pp. 271-301.

—, 1982, *Science and Convention: Essays on Henry Poincaré's Philosophy of Science and the Conventionalist Tradition*, Oxford, Pergamon Press.

—, 1991, «Geometrical and physical conventionalism of Henri Poincaré epistemological formulation», in *Studies in History and Philosophy of Science*, 22, n. 1, pp. 1-22.

Gilain, C., 1991, «La théorie qualitative de Poincaré et le problème de l'integration des équations différentielles», in *Cahiers d'histoire et de philosophie des sciences*, XXXIV, pp. 215-242.

Gray, J., 1992, «Poincaré and Klein - Groups and Geometry», in *1830-1930: A Century of Geometry. Epistemology, History and Mathematics*, a cura di L. Boi, D. Flament, J. M. Salanskins, Berlin, Springer, pp. 35-44.

—, 1992, «Poincaré, topological dynamics and the stability of the solar system», in *The investigations of difficult things, essays on Newton and the history of exact sciences in honour of D.T. Whiteside*, a cura di P. Harman, A. Shapiro, Cambridge, Cambridge University Press, pp. 503-524.

Hadamard, J., 1914, «Le problème des trois corps», in *Henri Poincaré l'œuvre scientifique, l'œuvre philosophique*, a cura di P. Boutroux, V. Volterra, J. Hadamard, Paris, Alcan, pp. 51-114.

—, 1921, «*L' Œuvre mathématique de Poincaré*», in *Acta Mathematica*, XXXVII, pp. 203-287; oppure in J. H. Poincaré, *Œuvres*, cit., vol. XI, pp. 187-204.

Huygens, C., 1888, *Œuvres complétes de Christiaan Huygens*, 22 vols., La Haye, Société Hollandaise des sciences, vol. 8, pp. 214-218.

Israel, G., 1992, «Poincaré et Enriques: deux points de vue différents sur les relations entre géométrie, méchanique et physique», in *1830-1930: A Century of Geometry. Epistemology, History and Mathematics*, cit., pp. 107-126.

Israel, G., Menghini, M., 1998, «The 'Essential Tension' at Work in Qualitative Analysis: A Case Study of the Opposite Points of View of Poincaré and Enriques on the Relationship between Analysis and Geometry», in *Historia mathematica*, 25, pp. 379-411.

Laskar, J., 1992, «La stabilité du système solaire», in *Chaos et déterminisme*, cit., pp. 170-211.

Leibniz, G. W., 1880, *Monadologie*. *Accompagnée d'eclarissements par Emile Boutroux*, Paris, Delagrave, pp. 225-231.

—, 1969, «Studies in a Geometry of Situation with a letter to Christiaan Huygens», in *Philosophical papers and letters*, a cura di L. E. Loemker, Dordrecht-Boston, Reidel Publishing Company, pp. 248-258.

—, 2004, «De Analysis Situs», in Leibniz, *Mathematische Schriften*, 7 vols., Georg Zurich, New York, Olms verlag, Hildesheim, vol. V, pp. 178-183.

Mates, B., 1986, *The philosophy of Leibniz*, Oxford, Oxford University Press.

Nowak, G., 1996, «The concept of Space and Continuum in Poincaré's Analysis Situs», in *Henri Poincaré. Science et phlosophie*, cit., pp. 365-377.

Peterson, I., 1993, *Newton Clock's, chaos in the solar system*, New York, Freeman.

Petitot, J., 1990, «Forme», in *Encyclopædia Universalis*, 9, pp. 712-728.

Poincaré, J. H., 1879, *Sur les propriétés des fonctions définies par les équations aux différences partialles*, Paris, Gauthiers-Villars; oppure in J. H. Poincaré, *Œuvres 1916-56*, *Œuvres*, XI vols., Paris, Gauthier-Villars, vol. I, pp. LX-CIXXX.

—, 1880, «Note sur les principes de la mécanique dans Descartes et dans Leibniz», in Leibniz, *Monadologie*, Paris, Degrave, pp. 225-231.

—, 1881, «Mémoire sur le courbes définies par une équation différentielle (première partie)», in *Journal des mathématiques pures et appliquées*, VII, pp. 375-422; oppure in J. H. Poincaré, *Œuvres*, cit., vol. I, pp. 3-44.

—, 1882, «Mémoire sur le courbes définies par une équation différentielle (deuxième partie)», in *Journal des mathématiques pures et appliquées*, VIII, pp. 251-296; oppure in J. H. Poincaré, *Œuvres*, cit., vol. I, pp. 44-84.

—, 1885, «Sur le courbes définies par une équation différentielle (troisième partie)», in *Journal des mathématiques pures et appliquées*, I, pp. 167-244; oppure in J. H. Poincaré, *Œuvres*, cit., vol. I, pp. 90-161.

—, 1886. «Sur le courbes définies par une équation différentielle (quatrième partie)», in *Journal des mathématiques pures et appliquées*, II, pp. 151-217, oppure in J. H. Poincaré, *Œuvres*, cit., vol. I, pp.167-222.

—, 1890, «Sur le problème des trois corps et les équation de la dynamique», in *Acta Mathematica*, 13, pp. 1-270; oppure in J. H. Poincaré, *Œuvres*, cit., vol. VII, pp. 262-479.

—, 1895, «Analysis Situs», in *Journal de l' Ecole Polytechnique*, ser. 2 (1), pp. 1-121; oppure in J. H. Poincaré, *Œuvres*, cit., vol. VI, pp. 193-288.

—, 1899, «Complément à l'Analysis Situs», in *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, 13, pp. 285-343; oppure in J. H. Poincaré, *Œuvres*, cit., vol. VI, pp. 290-337.

—, 1902a, «Sur certaines surfaces algébriques; troisième complément à l'Analysis Situs», in *Bulletin de la Société mathématique de France*, 30, pp. 49-70; oppure in J. H. Poincaré, *Œuvres*, cit., vol. VI, pp. 373-392.

—, 1902b, «Sur les cycles des surfaces algébriques; quatrième complément à l'Analysis Situs», in *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 8, pp. 169-214; oppure in J. H. Poincaré, *Œuvres*, cit., vol. VI, pp. 397-434.

—, 1902c, *La Science et l'Hypothèse*, Paris, Flammarion, seconda edizione 1907.

—, 1904, «Cinquième complément à l'Analysis Situs», in *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, 18, pp. 45-110; oppure in J. H. Poincaré, *Œuvres*, cit., vol. VI, pp. 435-498.

—, 1913, «Pourquoi l'espace a trois dimensions», in J. H. Poincaré, *Dernières Pensées*, Paris, Flammarion, pp. 55-97.

—, 1921, «Analysis Situs», in «Analyse de ses travaux scientifiques faite par H. Poincaré», in *Acta Mathematica*, 38, pp. 36-135.

—, 1995, *Geometria e Caso*, a cura di C. Bartocci, Torino, Bollati Boringhieri.

Prigogine, I., Stengers, I., 1979, *La Nouvelle Alliance*, Paris, Gallimard, (2e editions 1986).

Sinigaglia, C., 2003, «Introduzione», in J. H. Poincaré, 2003, *La Scienza e l'Ipotesi*, ed. it. con originale a fronte a cura di C. Sinigaglia, Milano, Bompiani, pp. V-XXIV.

Sturm, C. F., 1838, «Mémorire sur les équations differentielles linéaires du second ordre», in *Journal des mathématiques pures et appliquées*, I, pp. 106-186.

Thom, R., 1977, *Stabilité structurelle et Morphogénese*, Paris, Intereditions.

—, 1983, *Paraboles et Catastrophes*, Paris, Flammarion.

Note

[1] Thom (1977).
[2] «L'usage du terme qualitatif a en Science – en Physique surtout – un aspect péjoratif; et un physicien m'a rappelé, non sans véhémence, le mot du Rutherford: 'L'accord qualitatif d'une théorie et de l'expérience n'exprime qu'un accord grossier (*Qualitative is nothing but poor quantitative*)'» (Thom 1977, 4). Trad. it. mia.
[3] «Tendance naturelle de l'esprit à donner à la forme d'une courbe une valeur intrinsèque». *Ibidem*. Trad. it. mia.
[4] Poincaré (1881); Poincaré (1882); Poincaré (1885); Poincaré (1886). Da qui in poi ogni riferimento a questi lavori di Poincaré sarà tratto dall'edizione contenuta in *Œuvres*.
[5] Jacques Charles-François Sturm (1803-1855), matematico francese di origine tedesca, precettore dei figli di madame de Staël, vinse nel 1827 un premio dell'*Académie des Sciences* per uno studio sulla compressibilità dei liquidi condotto con l'amico Jean-Daniel Colladon (1802-1893). Successivamente svolse anche degli studi sulla velocità del suono in acqua. Dal 1836 divenne membro dell'*Académie des Sciences*, fu professore presso l'*École Polytechnique* e successe a Poisson alla cattedra di meccanica della *Faculté des Science* della *Sorbonne*. Nel suo articolo Poincaré cita il famoso "teorema di Sturm", risalente al 1829. Esso stabilisce la possibilità di calcolare il numero di radici reali e distinte in una funzione polinomiale all'interno di un intervallo dato. Nello specifico l'enunciato del teorema dice che: Il numero di radici reali e distinte di una funzione polinomiale a coefficienti reali in un intervallo dato $[a;b]$ in cui a e b non sono delle radici è uguale al numero di cambiamenti di segno della successione di Sturm ai confini di questo intervallo. Come inoltre sottolinea Gilain (1991, 224, nota 41) nel 1836 venne pubblicato sul *Journal de Mathematiques Purées et Appliquées* un intervento che Sturm lesse all'*Académie des Sciences* nel 1833 intitolato *Mémorire sur les équations differentielles linéaires du second ordre*, nel quale metteva in evidenza che sebbene fosse importante determinare il valore della funzione incognita per un valore isolato della variabile indipendente era altrettanto importante stabilire «la marche» ovvero l'andamento di tale funzione. È infatti nello studio delle sinuosità e della forma della curva integrale che è possibile, secondo Sturm, isolare delle proprietà di massimo interesse che riguardano numerosi fenomeni fisici e dinamici. Gilain sottolinea anche che non è possibile stabilire se vi sia una diretta influenza di Sturm su Poincaré (peraltro i loro due lavori vertono su categorie differenti di equazioni differenziali).
[6] «D'ailleurs, cette étude qualitative aura par elle-même un intérêt du premier ordre. Diverses questions fort importantes d'Analyse et de Mécanique peuvent en effet s'y ramener. Prenons par exemple, le problème des trois corps: ne peut-on pas se demande si l'un des corps restera toujours dans une certaine region du ciel ou bien s'il pourra s'éloigner indéfiniment; si la distance de deux corps augmentera, ou diminuera à l'infini, ou bien si elle restera comprise entre certaines limites? Ne peut-on pas se poser mille questions de ce genre, qui seront toutes résolues quand on saura construire qualitativement les trajectoires des trois corps? Et, si l'on considère un nombre plus grand de corps, qu'est-ce que la question de l'invariabilité de éléments des planètes, sinon une véritable question de géométrie qualitative, puisque faire voir que le grand axe n'a pas de variations séculaires, c'est montrer qu'il oscille constamment entre certaines limites? Tel est le vaste champ de découvertes qui s'ouvre devant les géomètres» (Poincaré 1881, 4-5). Trad. it. a cura di Claudio Bartocci in Poincaré (1995, 26).
[7] Cfr. Poincaré (1890). A proposito del problema dei tre corpi in Poincaré, in riferimento all'introduzione di un approccio qualitativo si vedano, tra gli altri: Barrow-Green (1994; 1997; 2005); Chabert-Dahan Dalmedico (1992); Laskar (1992); Ekeland (1984); Peterson (1993); Galison (2003); Bartocci (1995). Non si è volutamente riportato alcun riferimento al fatto che l'articolo pubblicato su *Acta Mathematica* nel '90 sia differente da quello consegnato da Poincaré alla giuria del concorso nell'88. Quest'ultimo come sappiamo conteneva un grave errore la cui correzione permetterà a Poincaré di imbattersi in quelle che, nella terminologica moderna, sono chiamate dinamiche caotiche. Sebbene quest'aspetto sia di primario interesse non è direttamente connesso con le osservazioni del presente articolo. Come infatti ben mostra Barrow-Green attraverso uno studio comparato delle due versioni dell'articolo, la metodologia di Poincaré rimane pressoché invariata e dunque non è un carattere che differenzia le due versioni.
[8] Ekeland (1984, 48-49).
[9] «Il faut donc sur cette frontière de la connaissance, un changement d'optique. Aux méthodes quantitatives, précises mais limitées, on essaie de suppléer par des méthodes qualitatives, qui portent plus loin mais donnent une image moins distincte». *Ibidem*. Trad. it. mia.
[10] Ekeland (2000, 99-135).

[11] Diversi anni dopo, in *La Scienza e L'Ipotesi*: «Si la semplicité était réelle et profonde, elle résisterait à la précision croissante de nos moyens de mesure; si donc nous croyons la nature profondément simple, nous devrions conclure d'une simplicité approchée à une simplicité rigoureuse. C'est ce qu'on faisait autrefois; c'est ce que nous n'avons plus le droit de faire. La simplicité des lois de Képler, par exemple, n'est qu'apparente» (Poincaré 1902, 165). «Se la semplicità fosse reale e profonda resisterebbe alla crescente precisione dei nostri strumenti di misura; se dunque credessimo che la natura sia semplice in profondità, dovremmo concludere da una semplicità approssimata a una semplicità rigorosa. Lo si faceva un tempo; ma non abbiamo più il diritto di farlo». Trad. it. a cura di Corrado Sinigaglia in Poincaré (2003, 227).

[12] Barrow-Green (1997, 30-41); Chabert-Dahan Dalmedico (1992); Hadamard (1914); Hadamard (1921, 236-252); Bartocci (1995); Gray (1992).

[13] Cfr. Bouquet-Briot (1878), Poincaré (1879).

[14] Per *nodi* si intendono dei punti singolari in cui si intersecano infinite famiglie di curve definite dall'equazione; per *fuochi* dei punti intorno a cui le curve si avvolgono secondo spirali logaritmiche; con l'espressione "punti di sella" si indicano invece quei punti attraverso i quali passano due e solo due curve definite dall'equazione differenziale; infine i *centri* identificano quei punti attorno a cui le curve formano dei cicli chiusi concentrici. Nella sua *analisi locale* Poincaré introduce anche il calcolo dell'Indice per una qualsiasi superficie *g* (S-F-N=2g-2).

[15] Poincaré (1895; 1899; 1902a; 1902b; 1904).

[16] Poincaré (1921).

[17] «Quant à moi, toutes les voies diverses où je m'étais engagé successivement me conduisaient à l'Analysis Sitûs. J'avais besoin des données de cette science pour poursuivre mes études sur les courbes définies par les équations différentielles et pour les étendre aux équations différentielles d'ordre supérieur et en particulier à celles du problème des trois corps» (Poincaré 1921, 101). Trad. it. a cura di Claudio Bartocci in Poincaré (1995, 100).

[18] Ekeland (2003, 107-108).

[19] Si fa qui riferimento alle osservazioni che Karl Weierstrass presenta a Oscar II di Svezia per motivare il conferimento del premio a Poincaré. Una versione integrale di tale giudizio è rintracciabile in Barrow-Green (1997, 237-239).

[20] «Apres tous les progres que j'ay faits en ces matieres, je ne fuis pas ancore content de l'Algebre, en ce qu'elle ne donne ny les plus courtes voyes, ny les plus belles constructions de Geometrie. C'est pourquoy lors qu'il s'agit de cela, je croy qu'il nous faut encor une autre Analyse proprement geometrique ou lineare, qui nous esprime directement, situm, comme l'Algebre esprime magnitudem» (Huygens 1888, 216). Trad. it. mia. La traduzione inglese di questa lettera è invece rintracciabile in Leibniz (1969, 248-258). Per un commento storico riguardante anche i successivi scritti sulla "geometria della posizione" si veda Aiton (1991, trad. it. 117-120).

[21] «Figura in universum praeter quantitatem continet qualitatem seu formam» (Leibniz 2004, 179). Trad. it. mia. Una traduzione inglese di questo passaggio è rintracciabile in Leibniz (1969, 254). Come precisa Loemker (in Leibniz 1969, 258), il breve saggio *De Analysis Situs* non è datato, esso tuttavia è strettamente legato agli studi geometrici che Leibniz compie in quegli anni.

[22] «Itaque Analisis situs appellare placet, quod ea situm recta et immediate explicat, ita ut figurae etiam non delineatae per notas in animo depingantur[...]» (Leibniz 2004, 182-183). Trad. it. mia. Una traduzione inglese di questo passaggio è rintracciabile in Leibniz (1969, 257).

[23] «Leibniz entend refuser la dictature du quantitatif, sans pour cela abandonner la physique mathématique [...].La mathématique que projette – et, dans une certaine mesure, construit – Leibniz, c'est quelque chose comme la *Mathesis Unversalis* dont parle Decartes, quelque chose qui déborde la mathématique cartésienne. C'est aussi, déjà, notre mathématique. Cette *mathesis* ne se reduit pas à l'algèbre, qui traite de la quantité en général. Elle concerne tout ce qui tombe sous l'imagination, pour autant que cela soit conçu distinctement. Elle ne traite pas seulement de la quantité, mais aussi de la disposition des choses. La notion d'ordre, pour être qualitative, n'en pas moins, chez Leibniz, mathématique. [...] La vérité d'une figure réside dans son aspect qualitatif plus que dans son aspect quantitatif» (Bouquiaux 1994, 160). Trad. it. mia. Nella nota 88 di p. 160 Bouquiaux afferma, in accordo con quanto sostenuto da Mates, che l'Analysis Situs di Leibniz non deve essere confusa con la topologia contemporanea. Questa presa di posizione, pienamente condivisibile sul piano storico e scientifico, non tiene però conto di un possibile legame epistemologico tra la topologia e l'*Analysis Situs* di Leibniz. Entrambe infatti si fondano sull'esigenza di offrire una trattazione matematica delle proprietà qualitative

delle figure geometriche, andando oltre quella che lo stesso Bouquiaux definisce la «dittatura del quantitativo». Per quanto concerne la posizione di Mates si veda Mates (1986,240).

[24] Sulle critiche di Leibniz a Descartes si vedano, tra gli altri: Belaval (1960, 494-496); Duchensneau (1994, 133-146); Bouquiaux (1994, 143-144).

[25] Cfr. Giannetto (2004, 235-247). In queste pagine, l'autore spiega inoltre le differenze epistemologiche che distinguono la fisica leibniziana da quella di Newton.

[26] Cfr. Poincaré (1880).

[27] Scrive infatti Poincaré: «Dans l'hypothèse cartésienne, une molécule quelconque peut éprouver dans son mouvement une perturbation sans exercer aucune influences sur les molécules voisines. Avec les lois de Leibnitz, au contraire, dès que la vitesse d'un point quelconque varie, soi en grandeur, soi en direction, la quantité des progrès serait augmentée ou diminuée si il n'y avait aucune autre modification dans le système. Pour que cette quantité ne soit pas altérée, ainsi que l'exige la loi leibnitienne, il faut que tout changement dans le mouvement d'un atome soit accompagné d'un changement contraire dans le mouvement d'un ou plusieurs autres *atomes*» (Poincaré 1880, 230). «Nell'ipotesi cartesiana, una molecola qualunque può subire nel suo movimento una perturbazione senza esercitare alcuna influenza sulle molecole vicine. Con le leggi di Leibniz, al contrario, quando la velocità di un punto qualunque varia, sia in grandezza, sia in direzione, la quantità di progresso sarà aumentata o diminuita se non ci sarà alcuna altra modificazione nel sistema. Perché questa quantità non sia alterata, così come lo esige la legge leibniziana, è necessario che ogni cambiamento nel movimento di un atomo sia accompagnato da un cambiamento contrario nel movimento di uno o più di altri atomi». Trad. it mia.

[28] «Il faut donc qu'il y ait une certaine harmonie dans les phénomènes mécaniques qui affectent les différentes parties d'un système». *Ibidem*. Trad. it. mia.

[29] «La science qui nous fait connaître les propriétés qualitatives des figures géométriques […]» (Poincaré 1921, 100). Trad. it. a cura di Claudio Bartocci in Poincaré (1995, 99).

[30] Poincaré (1913).

[31] «La quantité est complètement bannie et qui est purement qualitative […]. Dans cette discipline, deux figures sont équivalentes toutes les fois qu'on peut passer de l'une à l'autre par une déformation continue, quelle que soit d'ailleurs la loi de cette déformation pourvu qu'elle respecte la continuité […]. Du point de vu de la géométrie métrique, de celui même de la géométrie projective, les deux figures ne sont pas équivalentes; elles le sont au contraire du point de vue de l'Analysis Situs» (Poincaré 1913, 58). Trad. it. mia.

[32] I gruppi di trasformazioni costituiscono, per Poincaré, l'essenza stessa della geometria. Seguendo l'idea introdotta nel 1872 dal *Programma di Erlangen* di Felix Klein, Poincaré identifica ogni tipo di geometria con uno specifico gruppo di trasformazioni. Le proprietà geometriche delle figure sono così definite come invarianti di un gruppo caratteristico. Nella geometria proiettiva, ad esempio, sono geometriche quelle proprietà invarianti per le proiezioni (o sezioni). Il gruppo della topologia è molto ampio e include ogni tipo di trasformazione continua. Le uniche proprietà geometriche invarianti sono dunque quelle riguardanti l'ordine delle parti. Sulla nozione di gruppo di trasformazione in Poincaré si vedano, tra gli altri: Giedymin (1977; 1982; 1991); Boi (1996); Gray (1992); Sinigaglia (2003).

[33] Nowak (1996).

[34] «The mathematics of continuum», ivi, 373. Trad. it. mia.

[35] Più in generale Poincaré fa riferimento alla definizione analitica di continuo basata sull'introduzione di n variabili. In questi termini un continuo n-dimensionale è definito dall'introduzione di n coordinate indipendenti.

[36] «Cette définition fait bon marché de l'origine intuitive de la notion de continu, et de toutes les richesses que recèle cette notion. Elle rentre dans le type de ces définitions qui sont devenues si fréquentes dans la Mathématique, depuis qu'on tend à 'arithmétiser' cette science. Ces définitions, irréprochables, nous l'avons dit, au point de vue mathématique, ne sauraient satisfaire le philosophe. Elles remplacent l'objet à définir et la notion intuitive de cet objet par une construction faite avec des matériaux plus simplex; on voit bien alors qu'on peut effectivement faire cette construction avec ces matériaux, mais on voit en même temps qu'on pourrait en faire tout aussi bien beaucoup d'autres; ce qu'elle ne lasse pas voir c'est la raison profonde pour la quelle on a assemblé ces matériaux de cette façon et ne pas d'une autre. Je ne veux pas dire que cette 'arithmétisation' des mathématiques soit une mauvaise chose, je dis qu'elle n'est pas tout» (Poincaré 1913, 65). Trad. it. mia.

[37] L'intuizione geometrica di cui parla Poincaré presenta delle forti somiglianze con l'*Intuizione* che il matematico italiano Federigo Enriques introduce nelle sue *Lezioni di geometria proiettiva*. Quest'ultimo spiega infatti l'esistenza in geometria di una particolare intuizione attraverso la quale il matematico può

"vedere" gli oggetti delle sue dimostrazioni. Su un confronto tra Poincaré ed Enriques, ma da un punto di vista differente: Israel (1992); Israel-Menghini (1998).

[38] Poincaré (1913, 65).

[39] Poincaré critica anche la definizione di "assioma dell'ordine" data da Hilbert: «M. Hilbert a cherché à fonder une géométrie qu'on a appellée rationnelle parce qu'elle est affranchie de tout appel à l'intuition. Elle repose sur un certain nombre d'axiomes ou de postulats qui sont regardés, non comme des vérités intuitives, mais comme des définitions déguisées. Ces axiomes sont répartis en cinq groupes. Pour quatre des ces groupes, j'ai eu l'occasion de dire dans quelle mesure il est légitime de les regarder comme ne renfermant que des définitions déguisées. Je voudrais insister ici sur un de ces groupes, le deuxième, celui des «axiomes de l'ordre» […] pour les axiomes de l'ordre, il me semble qu'il y a quelque chose de plus, que ce sont de véritables propositions intuitives, se rattachant à l'Analysis situs» (Poincaré 1913, 93-95). «M. Hilbert ha cercato di fondare una geometria che abbiamo chiamato razionale perché si è affrancata di qualsiasi richiamo all'intuizione. Essa poggia su un certo numero di assiomi o di postulati che sono considerati non come delle verità intuitive, ma come delle definizioni camuffate. Questi assiomi sono divisi in cinque gruppi. Per quattro di questi gruppi ho avuto l'occasione di dire in che misura è legittimo considerarli come affermanti null'altro che definizioni camuffate. Vorrei insistere qui su uno di questi gruppi, il secondo, quello degli «assiomi dell'ordine» […] per gli assiomi dell'ordine mi sembra che ci sia qualcosa in più, che essi sono delle vere proposizioni intuitive, riconducibili all'Analysis Situs». Trad. it. mia.

[40] Nowak (1996, 94-95).

[41] La "forma" non è qui considerata come mera apparenza esterna, ma al contrario come espressione della più profonda essenza delle cose. Viene così recuperata una concezione della "forma" vicina alla tradizione scolastica. Su questo aspetto si veda Boutot (1993).

[42] «Pour les axiomes de l'ordre, il me semble qu'il y a quelque chose de plus, que ce sont de véritables propositions intuitives, se rattachant à l'Analisys situs» (Poincaré 1913, 94-95). Trad. it. mia.

[43] Cfr. Petitot (1990).

[44] Thom (1977); Thom (1983).

[45] Thom (1983, 112).

[46] Questa espressione è stata utilizzata da Ilya Prigogine e Isabelle Stengers per indicare l'immagine della natura costruita dalla meccanica razionale. Cfr. Prigogine-Stengers (1979, 35).