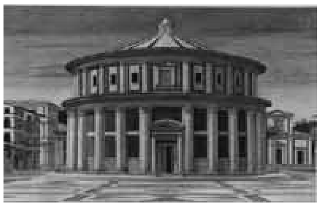
2006 Istituto di Filosofia Arturo Massolo
Università di Urbino
Isonomia



Il convenzionalismo geometrico di Poincaré

La nozione di gruppo e il "doppio ruolo" dell'esperienza

Giulia Giannini
Università di Urbino
giulia.giannini@uniurb.it

Abstract

Till at least the seventies, Poincaré's image given by physicists and mathematics was that of a scientist sticked to an out-of-date idea of science. On the contrary, several interpretations of Poincaré's geometrical conventionalism largely ignored the role played, in them, by mathematical concept of transformations group and by the notion, closely linked to it, of *isomorphism* among different groups. Furthermore, this has led to a great ambiguity and confusion as regards to the meaning of Poincaré's geometrical conventionalism: Poincaré's epistemological position, often accused of "nominalism", sometimes even associated with Carnap's or Reichenbach's "conventionalism", just recently has revalued. A better understanding of Poincaré's thought was possible through an analysis of the role played by Lie's theory of trasformations'groups and by the group's notion itself. Starting from this point of view we were able to understand Poincaré's originality that placed him between empiricism, that he harshly criticized on several occasions, and Kant's rationalism, that he believed necessary to reform.

L'interesse per il problema dello spazio assume nel pensiero di Henri Poincaré i caratteri di una vera e propria costante. Il suo primo articolo di carattere epistemologico relativo alla percezione dello spazio e al suo rapporto con la geometria è infatti del 1895, ma la sua produzione in merito si prolunga per tutto il corso della sua vita. Nel 1898 pubblica, su *The Monist,* l'articolo *On the Foundations of Geometry*[1]; nel 1900 risponde, sulla *Revue de métaphysique et de morale,* a una critica mossa da Russell, pubblicando *Sur les principes de la géométrie*[2]; del 1903 è *L'espace et ses trois dimensions*[3], articolo pubblicato in seguito come capitolo IV de *La valeur de la science*; nel 1907 scrive, per L'A*nnée psychologique,* un articolo su *La relativité de l'espace*[4] e del 1912 sono due articoli, *Pourquoi l'espace a trois dimensions*[5] e *L'espace et le temps*[6], pubblicati rispettivamente dalla *Revue de métaphysique et de morale* e dalla rivista *Scientia*.

D'altra parte, l'emergere di nuove geometrie, principalmente attraverso l'opera di J.C. Friedrich Gauss[7], Bernhard Riemann[8], Nikolaï Lobačevskij[9] e Janos Bolyai[10], mette per la prima volta in dubbio non solo l'unicità e la necessità della geometria d'Euclide e, di conseguenza, la fiducia nella geometria euclidea come idealizzazione corretta dello spazio fisico; ma anche la prospettiva kantiana secondo cui, attraverso le intuizioni pure di spazio e tempo, la materia delle sensazioni verrebbe organizzata a formare le rappresentazioni in modo tale da obbligarci a vedere il mondo esterno in un unico modo. Unita alle ricerche della nascente psico-fisiologia[11], inoltre, la scoperta di nuovi sistemi geometrici, apre la strada a un'indagine volta a spiegare i meccanismi psicologici che presiedono la formazione del concetto di spazio e dei postulati della geometria.

A partire dalla seconda metà dell'Ottocento, quindi, il problema dello spazio gioca un ruolo fondamentale all'interno del dibattito filosofico europeo e molti autori, non solo si interessano a esso, ma sentono anche la necessità di studiare i rapporti fra geometria e fisiologia. Nelle parole di Enriques infatti:

> Spetta invero alla Fisiologia d'indicarci in qual modo i rapporti d'estensione vengano percepiti colla vista, o col tatto, o colle sensazioni muscolari; ma per interpretare convenientemente questi resultati, bisogna sapere in qual modo i rapporti percepiti si leghino ai concetti geometrici fondamentali. […] Helmholtz ha bene avvertito la necessità, che qui si presenta, di dirigere ed interpretare l'esperienza fisiologica al lume di una critica dei postulati della Geometria; ma sembra che questo insegnamento sia stato dimenticato

> dopo di lui, perciò appunto il lavoro sperimentale, proseguito da varie parti, non ha dato l'intero profitto che sembrava promettere.[12]

Hermann Von Helmholtz[13] è il primo ad applicare, allo studio dell'origine e della natura delle nostre rappresentazioni spaziali, i risultati ottenuti in altri ambiti di ricerca, in particolare quelli dell'ottica fisiologica. Come sottolinea Federigo Enriques infatti, egli, per primo, ritiene necessario far convergere ricerche fisiologiche e studi geometrici. Prima di lui, studiosi come Alexander Bain[14], Hippolyte Taine[15], Joseph Delboeuf[16], si limitano a cercare di rendere ragione di questioni quali la determinazione di una posizione nello spazio, la localizzazione di una sensazione o la distinzione fra sensazioni contemporanee, ma senza alcun interesse riguardo al problema della genesi della nozione stessa di spazio[17]. La Geometria, d'altro lato, solo con Helmholtz acquista quegli strumenti fisiologici che le consentiranno di scendere sul terreno dell'esperienza, giungendo a mettere in relazione ricerca fondazionale e analisi delle sensazioni.

Enriques tuttavia si sbaglia nel ritenere che l'insegnamento di Helmholtz non abbia avuto seguito; basti pensare a Wilhelm Wundt, di quest'ultimo allievo ad Heidelberg. Collocandosi pienamente nella linea di ricerca del maestro, Wundt dedica le sue analisi alla natura fisiologica dello spazio e all'origine psicologica dei concetti spaziali. In particolare, egli basa la sua concezione dello spazio sulla distinzione fra spazio intuitivo e spazio concettuale. Il primo, di origine empirica, andrebbe indagato da una punto di vista psicologico; le nostre intuizioni spaziali infatti, altro non sarebbero se non

> […] Processi psicologici di fusione, […] fondati tanto sulle proprietà fisiologiche degli organi di senso e di movimento, quanto sulle leggi generali per le quali nascono le formazioni psichiche. Tali processi di fusione e gli ordini delle impressioni sensibili che si fondano su di essi, costituiscono per l'appunto dappertutto le basi della nostra esperienza.[18]

Se le nostre rappresentazioni dello spazio hanno origine psicologica, lo spazio concettuale è invece, secondo Wundt, prodotto dell'astrazione «[…]che sarebbe inconcepibile senza degli oggetti fisici con proprietà che gli derivano dall'esperienza»[19].

Relativamente all'importanza dell'esperienza e al ruolo centrale delle sensazioni nella genesi della nozione di spazio, Helmholtz non trova dei continuatori solo fra i suoi allievi; anche se all'interno di una prospettiva differente, altri, dopo di lui, hanno infatti cercato di mettere in luce il ruolo fondamentale delle sensazioni all'interno di un'indagine sui fondamenti della geometria e sulla costituzione della nozione stessa di spazio. È il caso ad esempio di Carl Stumpf autore, nel 1873, di quello che potremmo definire il primo trattato di psicologia dello spazio[20]. In questo lavoro Stumpf analizza l'origine psicologica della rappresentazione dello spazio; giudicando insufficienti le posizioni sia degli empiristi (come Herbart), sia degli associazionisti (come Bain) ma soprattutto di quelli che Helmholtz definì *nativisti* (come Weber o Lotze)[21], Stumpf elaborò una sua propria prospettiva basata sull'idea che «lo spazio e la qualità sensibile formino un tutto inestricabilmente connesso, che viene percepito in ogni rappresentazione dello spazio»[22]. In contrasto con la dottrina kantiana, Stumpf è il primo a mostrare che le qualità, ad esempio il colore, sono originariamente spaziali. Non solo, nel 1906, egli afferma inoltre che a far parte delle sensazioni non sono solo le qualità, ma

> anche l'estensione spaziale e la distribuzione delle impressioni visive e tattili, poiché non solo è dato ciò che questi contenuti hanno di qualitativo, ma anche, allo stesso modo, ciò che hanno di quantitativo[23].

Richiamandosi a sua volta a Berkeley[24], Stumpf sostiene l'impossibilità di rappresentare lo spazio senza rappresentarne le qualità. Estensione e qualità sono inseparabili, non possono che venir date insieme. È questa una posizione che sarà condivisa anche da Husserl che sia in *Ding und Raum*[25], sia nella sua *Systematische Raumkonstitution*[26], insisterà a più riprese su come le qualità sensibili si fondino necessariamente con una certa estensione spaziale che ne costituisce il substrato[27].

È in questo contesto, anche se con esiti e modalità differenti, che si possono collocare le ricerche di Poincaré sul problema dello spazio. L'influenza dell'opera di Helmholtz su Poincaré è rintracciabile già nel suo primo articolo in ambito geometrico[28], pubblicato nel 1887, anno del suo ingresso all'*Académie des Sciences*. Il titolo dell'articolo, *Sur les hypothèses fondamentales de la géométrie*, rimanda esplicitamente alla prolusione di Riemann del 1854[29]. Fra le fonti del testo, sebbene il suo nome non vi compaia esplicitamente, vi è però anche il lavoro di Helmholtz. Il saggio nasce infatti dal tentativo di caratterizzare i movimenti rigidi del piano euclideo, vale a dire quei movimenti della figura che non ne alterano le distanze fra i punti. In particolare, nelle note conclusive al testo, Poincaré fa riferimento alla possibilità di confermare l'ipotesi euclidea dello spazio fisico attraverso lo studio dei movimenti dei corpi solidi:

> [...] esistono in natura dei corpi particolari, che diciamo solidi e l'esperienza ci insegna che i diversi movimenti possibili di questi corpi sono legati pressappoco dalle stesse relazioni che le diverse operazioni del gruppo [euclideo]. [30]

È solo a partire da Helmholtz che l'esistenza dei corpi solidi permette una determinazione, anche se approssimativa, della geometria dello spazio; è dunque a Helmholtz che Poincaré fa riferimento nel momento in cui si avvale della nozione di *spostamento senza deformazione* di un corpo solido. Questa riveste un ruolo importante nell'opera di Poincaré: le geometrie infatti altro non sono per lui che lo studio dei movimenti che mantengono inalterati certi rapporti. L'esistenza dei corpi rigidi dunque, oltre a essere l'unico dato sperimentale di cui l'uomo dispone per la costruzione degli spazi geometrici, ne è anche un presupposto fondamentale.

Ma la filosofia della geometria di Poincaré pur risentendo, fin dai suoi esordi, delle teorie helmholtziane, si affranca tuttavia progressivamente da esse allorché si trova ad affrontare il problema del ruolo dell'esperienza nella determinazione della geometria dello spazio. Se è vero infatti che il gruppo di trasformazioni dello spazio fisico presenta notevoli analogie con il gruppo euclideo, è vero anche, per Poincaré, che la determinazione del primo è legata in modo esclusivo all'osservazione di fenomeni fisici, mentre la geometria dello spazio non può essere in alcun modo determinata con certezza attraverso l'esperienza.

1. Lo spazio dell'esperienza: spazio geometrico e spazio rappresentativo

Se con l'articolo del 1887 dimostra un primo interesse per la geometria e per una genesi della nozione di spazio, è solo nel 1895 che Poincaré comincia davvero a inserirsi in modo originale nel dibattito sui fondamenti della geometria. Di quest'anno è infatti *L'espace et la géométrie*[31], articolo comparso prima sulla *Revue de métaphysique et de morale* e pubblicato in seguito come capitolo IV de *La science et l'hypothèse*.

In esso Poincaré separa, per la prima volta in modo esplicito, lo spazio geometrico dallo spazio rappresentativo, operando una distinzione non solo fondamentale per il suo pensiero geometrico, ma anche centrale per l'intera riflessione epistemologica del tempo sulla costituzione spaziale.

Come infatti sottolinea Hermann Weyl all'inizio della sua *Analisi matematica del problema dello spazio*[32], la spiegazione dei rapporti fra spazio intuitivo o sensibile e spazio geometrico è una delle più importanti questioni attorno a cui si sviluppa il problema filosofico dello spazio. Tant'è vero che, fra la fine dell'Ottocento e i primi anni del Novecento, sono molti gli autori che vi si dedicano, proponendo soluzioni differenti. Come mostra infatti Federigo Enriques:

> Dappoichè la constatazione di un punto, come fatto bruto, dipende dalla posizione dell'osservatore, e al variare di questa i rapporti fra i punti appariscono al soggetto come diversi, ne consegue che l'insieme dei punti, così intesi, costituisce uno *spazio fisiologico* relativo all'osservatore stesso, e differente dallo *spazio geometrico*. Questa distinzione fondamentale ricorre nei «Beiträge zur Analyse der Empfindungen» di E. MACH e negli studii dello HERING da lui citato (op. cit., trad. it., pag. 152).
> Anche altri autori hanno fermato la loro attenzione su questo, che lo spazio fisiologico, visivo o tattile o muscolare, non possiede i caratteri di omogeneità e di isotropia, che concediamo allo spazio geometrico; […][33]

Per Enriques, ad esempio, lo spazio fisiologico presenta già delle caratteristiche quasi-geometriche e si distingue dallo spazio proprio della geometria fondamentalmente perché frutto di una rappresentazione relativa all'osservatore. Lo spazio geometrico deriva, per Enriques, da una sorta di astrazione che, a partire dai vari possibili spazi fisiologici, elimina, grazie al confronto, gli elementi di a-simmetria presenti in questi ultimi. Prodotto dell'astrazione, lo spazio geometrico conserverebbe tuttavia traccia dei diversi spazi fisiologici da cui deriva. Nella formulazione matematica dei postulati della geometria è possibile rintracciare infatti, spiega Enriques, i meccanismi che presiedono la costituzione delle rappresentazioni visive e tattili dello spazio. Queste ultime si fondono quindi in un'unica rappresentazione dello spazio, così come, sul piano matematico, il quinto postulato euclideo sancisce l'unione dello spazio proiettivo (facente riferimento alle sensazioni visive) e di quello metrico (facente riferimento alle sensazioni tattili) in un unico spazio euclideo. Il postulato delle parallele renderebbe dunque matematicamente la fusione fisiologica tra spazio visivo e spazio tattile.

Come lo stesso Enriques sottolinea, anche in Ernst Mach si legge una netta separazione fra spazio fisiologico e spazio metrico (geometrico). Afferma infatti Mach:

> Abbiamo già sottolineato ripetutamente che il sistema delle nostre sensazioni spaziali, lo spazio fisiologico, se così ci è lecito esprimerci, si distingue notevolmente dallo spazio geometrico (intendiamo qui lo spazio euclideo). Ciò vale non soltanto per lo spazio visivo ma anche per lo spazio tattile dei ciechi. Lo spazio geometrico ha le stesse proprietà ovunque e in tutte le direzioni (è omogeneo e isotropo); esso è inoltre illimitato e infinito (in senso riemmaniano). […]Con l'acquisizione della mobilità, lo spazio fisiologico si approssima a quello euclideo, senza però uguagliarlo mai completamente nella semplicità delle sue proprietà. Con lo spazio geometrico lo spazio fisiologico ha in comune la triplice varietà e la continuità. Al movimento continuo del punto A nello spazio geometrico corrisponde un movimento analogo del punto A nello spazio fisiologico.[34]

Lo spazio fisiologico, in particolare, è per Mach un sistema di «sensazioni d'organo graduate» (*abgestuften Organempfindungen*), dove per *sensazioni d'organo* si intendono quelle sensazioni unicamente dipendenti dall'individualità dell'organo, quelle sensazioni cioè che, sempre uguali a ogni stimolo, variano però da organo a organo. Queste sensazioni corrispondono, per Mach, alle *sensazioni spaziali*. Da queste bisogna distinguere le sensazioni sensoriali (*Sinnesempfindungen*), dipendenti invece dalla qualità dello stimolo.

> Sensazioni d'organo e sensazioni sensoriali possono comparire solo *insieme*. Le sensazioni d'organo, sempre uguali, formano però ben presto, rispetto alle mutevoli sensazioni sensoriali, un *registro* fisso in cui le ultime vengono sistemate.[35]

Lo spazio fisiologico ha un'esistenza di natura teleologica: tutte le sensazioni spaziali hanno, per Mach, la funzione di guidare in modo corretto i movimenti, in vista di salvaguardare la specie umana. Questa funzione, comune a tutte le sensazioni, sarebbe anche alla base della loro associazione. Lo spazio geometrico differirebbe quindi da quello fisiologico perché esatto e libero da qualunque finalità, esso inoltre risulterebbe, da un punto di vista concettuale, più chiaro dello spazio fisiologico, perché meno legato alle sensazioni. La distinzione fra i due spazi sembra basarsi, per Mach, non tanto sulla loro essenza, quanto piuttosto sulla loro funzione e sul loro grado di sviluppo.

Dallo spazio fisiologico intuitivo, attraverso l'esperienza fisica, è possibile apprendere le proprietà metriche delle forme, la cui consapevolezza conduce alla conoscenza di certi teoremi geometrici. È grazie poi a un'idealizzazione concettuale delle esperienze geometriche fondamentali, che si rende possibile il passaggio allo spazio geometrico vero e proprio: «Intuizione, esperienza fisica e idealizzazione concettuale sono dunque i tre momenti che cooperano alla geometria scientifica»[36].

Come per Enriques, anche per Mach dunque lo spazio fisiologico presenta già caratteristiche molto simili a quello geometrico, che, proprio per questo motivo, risulta derivabile dal primo attraverso una semplice astrazione o idealizzazione concettuale.

Come si è detto, nemmeno Poincaré prescinde, nelle sue riflessioni sul problema dello spazio, da una distinzione fra uno spazio fisiologico, frutto dell'intuizione e dell'esperienza e uno spazio geometrico astratto e affronta per la prima volta in modo diretto tale questione nel suo articolo del 1895.

> Sovente si dice che le immagini degli oggetti esterni siano localizzate nello spazio e che anzi non possano formarsi che a questa condizione. Si dice pure che questo spazio, che in tal modo serve da quadro interamente predisposto per le nostre sensazioni e per le nostre rappresentazioni, sia identico a quello dei geometri di cui possiederebbe tutte le proprietà. [37]

Sebbene si possa pensare che lo spazio geometrico coincida con lo spazio delle nostre sensazioni e delle nostre rappresentazioni, in realtà non è così. Lo spazio "propriamente detto", lo spazio «dei geometri» presenta, per Poincaré, caratteristiche radicalmente differenti da quelle dello spazio sensibile. Continuo, infinito, tridimensionale, omogeneo e isotropo, esso non può in alcun modo essere ridotto allo spazio rappresentativo. Quest'ultimo non è infatti altro se non un'approssimazione sensibile dello spazio geometrico. Le nostre rappresentazioni derivano direttamente dalle nostre sensazioni ed è per questo motivo, secondo Poincaré, che la cornice all'interno di cui esse si dispongono e si organizzano, vale a dire lo spazio rappresentativo, non può che essere radicalmente diversa dallo spazio geometrico.

> Ci è impossibile rappresentarci i corpi esterni nello spazio esattamente come è impossibile per un pittore dipingere su una tela piana oggetti con le loro tre dimensioni.
> Lo spazio rappresentativo non è che un'immagine dello spazio geometrico, un'immagine deformata da una sorta di prospettiva, e non possiamo rappresentarci gli oggetti se non piegandoli alle leggi di questa prospettiva. [38]

Mentre la geometria si occupa di solidi ideali assolutamente invariabili che dimorano nello spazio geometrico ideale, l'esperienza sensibile ha a che fare con solidi naturali che si collocano nello spazio rappresentativo.

È in occasione di queste riflessioni sulla duplice natura dello spazio che Poincaré muove una prima critica a Kant. Per Kant lo spazio è un *a priori* della sensibilità, un'intuizione pura. Essa non è empirica: in alcun modo può essere derivata dall'esperienza. È una forma oggettiva delle nostre rappresentazioni, senza la quale alcuna relazione di giustapposizione sarebbe possibile e sulla quale si fonda la possibilità stessa della geometria e dei giudizi sintetici a priori. Per Poincaré invece, lo spazio sensibile non è assolutamente identificabile con lo spazio geometrico e già per questa ragione esso non può in alcun modo essere considerato una forma *a priori* della sensibilità. Lo spazio sensibile, quadro delle sensazioni e delle rappresentazioni, non può essere quindi una forma *a priori* dell'intuizione nel senso kantiano.

Il problema diventa allora quello di spiegare in primo luogo come sia possibile per l'uomo costruire questo spazio rappresentativo sulla base dei suoi diversi spazi sensoriali e, in seconda istanza, quello di render conto del passaggio da questo spazio della rappresentazione e dell'esperienza allo spazio geometrico ideale. Tali questioni sono affrontate da Poincaré non solo nell'articolo del 1895, ma anche, e in modo forse più completo, nel suo lungo saggio *On the foudation of geometry*[39], apparso in inglese sul *The Monist* nel 1898.

2. Le tre forme dello spazio rappresentativo

Lo spazio sensibile o rappresentativo possiede per Poincaré una triplice forma, esso può infatti essere suddiviso in spazio visivo, spazio tattile e spazio motorio.

L'idea che lo spazio rappresentativo sia uno spazio complesso, risultato dell'associazione dei diversi spazi tattile, visivo e motorio, può essere fatta risalire alla scuola associazionista. Alexander Bain[40] ad esempio, nel suo *Les Sens et l'Intelligence* (1855), cerca di mostrare come la nostra rappresentazione spaziale, e in particolare le nozioni di estensione e di distanza, non sia originaria, ma derivi dall'associazione di sensazioni tattili, visive e muscolari. Nel caso della distanza per esempio, l'occhio da solo non sarebbe sufficiente: è solo grazie al suo movimento, alle sensazioni muscolari che ne derivano e all'associazione di queste ultime con la percezione di un cambiamento nell'oggetto, che è possibile cogliere la misura della distanza che separa l'oggetto dall'osservatore. Anche per quanto riguarda l'estensione, essa non sarebbe possibile, secondo Bain, se non attraverso la combinazione di sensazioni visive, tattili e motorie. Lo stesso spazio, in quanto grandezza estesa, non sarebbe spiegabile al di fuori di questa associazione. Come sottolinea Giovanni Cesca,

> Questa teoria però non può spiegare la genesi dello spazio come vorrebbe il Bain, perché da sensazioni intensive non si può ottenere con nessuna associazione l'estensione. […] l'associazione non può darci un prodotto nuovo diverso dai componenti, ma soltanto può unire strettamente insieme diverse sensazioni, sicché l'una richiami l'altra; per cui in seguito all'associazione le sensazioni tattili e visive richiameranno le muscolari e queste quelle. Questo è ciò che può dare l'associazione e non altro, sicché se con l'associazione il Bain crede di poterci dare la genesi della nozione spaziale ciò proviene dal fatto che alcune di quelle sensazioni tacitamente involgono già in sé la nozione spaziale.[41]

Bain, oltre a trattare il problema generale della nozione di spazio, affronta anche, seppure solo marginalmente, la questione relativa alla localizzazione delle sensazioni, vale a dire della percezione del loro luogo di origine. Quest'ultima viene ripresa e sviluppata da Hippolyte Taine[42]. Secondo Taine la localizzazione avviene grazie all'associazione della sensazione a certe immagini visive, tattili e muscolari. Egli effettua quindi una distinzione fra sensazioni tattili e sensazioni visive: attraverso le prime, per mezzo di una serie di sensazioni muscolari, è possibile percepire attributi spaziali quali l'estensione, la distanza o la posizione; mentre attraverso le seconde si percepiscono, in un primo momento, solo qualità come il colore. È solamente grazie all'associazione di queste singole sensazioni visive pure con l'immagine delle sensazioni tattili e muscolari corrispondenti, che si rende possibile la genesi della nozione spaziale. Taine mostra bene inoltre come la localizzazione delle sensazioni, e quindi l'assegnazione a esse di un posto nello spazio, non sia originaria; essa infatti risulta per Taine da un'esperienza ripetuta: quella del movimento che ci permette di cercare il luogo in cui possiamo interrompere o modificare la sensazione.

Joseph Delboeuf spiega la percezione dell'estensione attraverso la vista, con la possibilità, da parte dell'occhio, di ricondurre l'immagine nel punto di visione più netta sulla retina. L'occhio ha infatti, secondo Delboeuf, una conoscenza simultanea di una serie di punti, che vengono localizzati in rapporto a quello che Husserl definisce *l'optimum* visivo. Questo è reso possibile grazie al movimento che si lega alla vista, ma anche a tutti gli altri sensi, dandoci delle sensazioni unite alla percezione dell'estensione. Attraverso la motilità e la distinzione fra movimenti volontari e involontari, l'uomo ottiene le nozioni di direzione, distanza, luogo e spazio. Tutte le percezioni spaziali si basano infatti per Delboeuf sul sentimento dello sforzo; ogni rappresentazione spaziale è dunque risultato di un'associazione fra il movimento e una sensazione. Per questo motivo, le nozioni spaziali non derivano solo dal tatto e dalla vista, ma da qualunque organo dotato di motilità.

La scuola associazionista ha il merito di affrontare il problema della localizzazione spaziale, mostrando come questa non sia originaria, ma risulti dall'associazione delle diverse sensazioni con il sentimento del movimento (associazione di cui si interessa, come si vedrà, anche Poincaré). Solo con Bain, Taine e Delboeuf si ha inoltre una prima distinzione fra i diversi spazi percettivi che concorrono alla genesi di un unico spazio intuitivo.

Anche Poincaré, sicuramente ben informato sulle ricerche della scuola associazionista[43], affronta il problema della genesi dello spazio a partire, come si è detto, dalla costituzione di diversi spazi percettivi. Una descrizione piuttosto minuziosa della formazione di questi diversi spazi sensoriali e delle loro principali caratteristiche in rapporto a quelle dello spazio geometrico ideale è rintracciabile sia nell'articolo del 1895, sia nel capitolo III de *La Valeur de la Science*[44] che riprende, modificandolo, un articolo intitolato *L'Espace et ses trois dimensions*[45], pubblicato nel 1903 dalla *Revue de métaphysique et de morale*; qualche riferimento è inoltre rintracciabile in un testo del 1912, *Pourquoi l'espace a trois dimensions*[46], pubblicato l'anno successivo come capitolo III di *Dernières pensées*; in questo testo non sono tuttavia presenti, a questo riguardo, osservazioni particolarmente originali rispetto alle precedenti.

L'analisi di Poincaré prende le mosse dallo spazio visivo. All'origine di esso stanno tre tipi di sensazione: quelle retiniche, quella di convergenza e quella di accomodamento. Se intervenissero solo le prime lo spazio visivo sarebbe uno «spazio visivo semplice» e presenterebbe solo due dimensioni, mentre se sensazione di convergenza e di accomodamento non andassero sempre d'accordo, lo spazio visivo risultante presenterebbe addirittura quattro dimensioni[47].

Lo spazio visivo per Poincaré non è che una parte dello spazio globale e nella nozione stessa di esso è presente qualcosa di artificiale. Questo spazio non solo non possiede che due dimensioni, ma è anche limitato e non omogeneo. Se infatti si considera «[...]un'impressione puramente visiva dovuta a un'immagine che si forma sulla retina»[48], è facile notare come questa non presenti alcuna profondità e come la percezione di una terza dimensione sia legata allo sforzo d'accomodamento e alla convergenza degli occhi. Un'impressione puramente visiva presenta infatti un'immagine continua e bidimensionale e le uniche nozioni che l'uomo è in grado di acquisire attraverso le sole sensazioni visive sono quella di continuità e delle prime due dimensioni. Se la vista permette di apprezzare le distanze e, di conseguenza, di percepire una terza dimensione è solo grazie allo sforzo d'accomodamento e alla convergenza che occorre dare agli occhi perché l'immagine appaia nitida, grazie cioè a delle sensazioni muscolari aggiuntive. L'immagine inoltre, nello spazio visivo, è rinchiusa in un campo limitato che presenta dei bordi; questo non solo implica che il campo visivo non sia infinito, ma è anche all'origine della sua non omogeneità: all'interno di esso infatti i punti svolgono ruoli differenti e un punto al centro del campo non potrà mai apparire identico a un punto limitrofo[49].

Lo spazio visivo presenta dunque caratteristiche molto diverse rispetto a quelle dello spazio geometrico vero e proprio. Se anche si prendesse in considerazione lo spazio visivo completo tridimensionale, quello cioè derivante, non solo dalle sensazioni puramente visive ma anche dalle sensazioni di accomodamento e di convergenza, questo –pur presentando la dimensione della profondità– non sarebbe ancora né infinito, né omogeneo. Esso, inoltre, non sarebbe nemmeno isotropo: mentre le prime due dimensioni sarebbero il risultato di impressioni puramente visive, la terza risulterebbe originata da sensazioni di diverso tipo, la profondità giocherebbe quindi un ruolo diverso rispetto alle altre due dimensioni.

Per quanto riguarda lo spazio tattile le analisi di Poincaré non sono così dettagliate, egli si limita ad alcune osservazioni circoscritte alla percezione della distanza e della profondità attraverso il tatto, sottolineando in particolare le differenze e le analogie fra questo spazio e quello visivo. Poincaré prende in considerazione, relativamente alla genesi dello spazio tattile, un solo dito e quindi l'insieme delle posizioni che esso può assumere e delle sensazioni a esso relative. A differenza della vista, il tatto rende possibile l'individuazione del punto: esso infatti consente non solo di distinguere un punto dall'altro, ma anche di rilevarne la distanza. Infatti,

> Se [...] il mio senso muscolare mi avverte che mi sono mosso tra i due istanti a e b, ma in maniera da risentire successivamente le due serie di sensazioni muscolari S e S' che

> considero inverse; ne concluderò ancora, proprio come se non mi fossi mosso, che i punti occupati da A nell'istante a e da B nell'istante b sono identici, se constato che il mio primo dito tocca A nell'istante a e B nell'istante b.[50]

Questo è possibile perché, rispetto alla vista, il tatto non è un senso che si esercita a distanza.

Lo spazio così costituito è uno spazio tridimensionale, ha dunque lo stesso numero di dimensioni dello spazio propriamente detto. Nonostante questa somiglianza con lo spazio geometrico tuttavia «'Lo spazio tattile' è più complicato ancora dello spazio visivo e si allontana ulteriormente dallo spazio geometrico»[51]. Quest'ultimo infatti non solo è tridimensionale, ma, come si è detto, è anche infinito e omogeneo, caratteristiche che lo spazio tattile non possiede.

Ultima forma di spazio sensibile è, per Poincaré, lo spazio motorio. Esso trova la sua origine nelle sensazioni muscolari, vale a dire in quelle particolari sensazioni che accompagnano i movimenti del corpo. Per Poincaré il corpo proprio gioca un ruolo fondamentale nella costituzione dello spazio: è solo in rapporto a esso che l'uomo localizza gli oggetti esterni. Le relazioni spaziali fra questi oggetti non sono infatti percepibili se non nella misura in cui l'uomo è in grado di rapportarle al proprio corpo; esso funge, per così dire, da sistema di coordinate in rapporto alle quali è possibile percepire un oggetto in una determinata posizione e quindi localizzarlo nello spazio. Distanza, grandezza, direzione, non sono infatti percepite intuitivamente in modo immediato. Non avendo intuizione diretta della spazialità, tutto ciò che l'uomo può fare è confrontare distanze, grandezze e direzione con i propri strumenti di misura. Strumento per misurare lo spazio, di cui si serve istintivamente e al quale rapporta tutto, è per l'uomo il proprio corpo.

> Noi possediamo la facoltà di riferire il nostro spazio esteso tanto alla posizione A del nostro corpo, considerata come iniziale, quanto alla posizione B, che esso occupa alcuni istanti più tardi e che siamo liberi di scegliere a sua volta come iniziale: istante per istante operiamo dunque degli inconsci cambiamenti di coordinate.[52]

Localizzare un oggetto nello spazio significa dunque per Poincaré riflettere sullo svolgimento di un'azione che consenta di raggiungerlo, vale a dire riflettere su sequenze di sensazioni muscolari. Queste sensazioni non sono di per sé spaziali. Non si può nemmeno parlare propriamente di assi costanti in rapporto al corpo ma, grazie a esso, è possibile constatare la contiguità di due oggetti.

Lo spazio originato da queste sensazioni muscolari, lo spazio motorio, presenta, come ogni spazio sensibile, caratteristiche molto differenti rispetto a quello geometrico.

> Ciascun muscolo dà origine a una sensazione specifica che può crescere o diminuire, di modo che l'insieme delle nostre sensazioni muscolari dipenderà da tante variabili quanti sono i muscoli che abbiamo. Da questo punto di vista, *lo spazio motorio avrebbe tante dimensioni quanti sono i muscoli che abbiamo*.[53]

Complessivamente dunque, lo spazio rappresentativo nella sua triplice forma –visiva tattile e motoria– lo spazio cioè all'interno del quale si organizzano le sensazioni, è radicalmente diverso dallo spazio geometrico. Le rappresentazioni infatti non sono altro che la riproduzione di sensazioni, non hanno per questo nulla a che fare con la geometria.

Per capire quale relazione intercorra fra i diversi spazi e come sia possibile giungere all'idea di uno spazio geometrico, visto che questa non può essere considerata una forma imposta al nostro spirito, è necessario dunque analizzare più da vicino il ruolo giocato dalle sensazioni.

3. Le sensazioni

Riguardo all'importanza delle sensazioni e alla a loro funzione all'interno della costituzione spaziale è interessante prendere in esame alcune riflessioni contenute nell'articolo *On the foundation of geometry*. Questo testo, pubblicato per la prima volta in inglese sulla rivista americana *The Monist* nel gennaio 1898 e utilizzato come base per la stesura del capitolo V de *La Science et l'Hypothèse*, presenta tanto un interesse autonomo quanto un interesse storico nella costruzione del pensiero filosofico e matematico di Henri Poincaré. In esso Poincaré dichiara di voler chiarire alcuni punti delle sue idee sui fondamenti della geometria, già esposte a più riprese in diversi articoli precedenti e che potrebbero essere risultati oscuri; in particolare egli ritiene di doversi soffermare in modo più approfondito sulla «definizione di punto» e sulla «determinazione del numero di dimensioni». La sua indagine passa attraverso una teoria della percezione su base fisiologica e «riprende il problema dall'inizio»[54] vale a dire da un'analisi del ruolo giocato dalle sensazioni in relazione alla costituzione dello spazio; l'uomo infatti, nel suo contatto con il mondo, ha a che fare in primo luogo con i *fatti bruti* e, siccome questi non possono essere conosciuti se non attraverso il corpo, con le sensazioni. Un'analisi sulla costituzione dello spazio non può dunque prescindere da uno studio delle sensazioni e dei meccanismi attraverso i quali queste si organizzano dando forma allo spazio sensibile.

Già nelle prime pagine di questo lungo saggio, nell'affrontare il problema della costituzione e delle caratteristiche dello spazio sensibile, Poincaré sembra escludere che le sensazioni di per se stesse possano intervenire in modo essenziale nella genesi della nozione di spazio; egli infatti sostiene che «Le nostre sensazioni non possono darci la nozione di spazio. [...] Le sensazioni di per se stesse non hanno alcun carattere spaziale».[55]

Se infatti si possedesse un solo occhio incapace di muoversi, spiega Poincaré, non si avrebbe alcuna percezione delle distanze, o meglio, non si riuscirebbe in alcun modo a distinguere distanze piccole da distanze grandi. La percezione della distanza infatti non è parte integrante della sensazione stessa, tattile o visiva che sia, ma è legata al fatto che quando ci si trova davanti a due immagini A e B si ha coscienza che, attraverso un semplice movimento dell'occhio, è possibile portare in B l'immagine che si trovava in A.

Nel 1903, in un articolo poi pubblicato in *La valeur de la science*[56], Poincaré torna inoltre sulla questione della "spazialità" delle sensazioni sostenendo che:

> Quando si dice che le nostre sensazioni sono 'estese' non si può voler dire che una cosa: che esse si trovano sempre associate all'idea di certe sensazioni muscolari, corrispondenti ai movimenti che permetterebbero di raggiungere l'oggetto che le suscita, che permetterebbero, in altri termini, di difenderci da esse.[57]

Percezione della distanza, estensione e direzione non farebbero dunque parte integrante della sensazione e non sarebbero percepite direttamente attraverso di essa. È questo il motivo per cui Poincaré esclude che le sensazioni possano, da sole, condurci alla nozione di spazio. Questa troverebbe piuttosto la sua origine nelle *serie* di sensazioni, nella loro successione e nella loro correlazione ai dati cinestesici[58], vale a dire ai movimenti. Infatti «*Nessuna delle nostre sensazioni da sola avrebbe potuto condurci* *all'idea di spazio, noi vi giungiamo soltanto studiando le leggi secondo le quali queste sensazioni si succedono*.»[59].

È dunque attraverso la concatenazione delle diverse sensazioni che si giunge allo spazio sensibile che, pur non essendo che un'immagine imperfetta dello spazio vero e proprio, ne è pur sempre un'immagine. L'origine dello spazio rappresentativo quasi-geometrico non sarebbe quindi rintracciabile nelle nostre sensazioni prese isolatamente ma nelle leggi secondo le quali queste si succedono; e queste leggi non sono solo di natura psicologica o fisiologica ma anche, e soprattutto, di natura matematica.

4. Il movimento: cambiamenti di stato e cambiamenti di posizione

È a questo proposito che Poincaré affronta il problema del movimento e delle possibili modificazioni delle impressioni a questo connesse. La costituzione dello spazio prende infatti le mosse da un insieme di impressioni legate le une alle altre da una successione temporale e dalle modificazioni che queste possono subire. In particolare, per Poincaré, è possibile distinguere, nelle serie di impressioni, due tipi di cambiamenti: *cambiamenti di posizione* e *cambiamenti di stato*. Il passaggio da un insieme di impressioni A a un insieme B corrisponde in generale a un cambiamento di posizione dell'oggetto che causa queste impressioni. Nel caso in cui risulti possibile ripristinare l'insieme di impressioni A facendo dei movimenti tali da riportare il soggetto percipiente di fronte all'oggetto, ristabilendo in modo completo la situazione iniziale, si parla di cambiamento di posizione; nel caso in cui ciò non risulta possibile, ci si trova in presenza di cambiamenti di stato. Si danno quindi dei cambiamenti di posizione quando è possibile correggere una modificazione che si è prodotta e stabilire lo stato iniziale attraverso una modificazione inversa. Cambiamenti di stato quando una tale correzione non è possibile.

Più generalmente un insieme di impressioni può essere modificato in due modi diversi: da una parte senza che il soggetto provi sensazioni muscolari, dall'altra attraverso un'azione motoria accompagnata da sensazioni muscolari. Nel primo caso, Poincaré parla di un *cambiamento esterno*, nel secondo caso, di un *cambiamento interno*. I cambiamenti di posizione sarebbero descrivibili in questi termini come cambiamenti esterni correggibili attraverso un cambiamento interno. Lo studio della struttura di queste modificazioni, suggerirebbe inoltre il passaggio alla nozione matematica di *gruppo di trasformazioni*. Attraverso errori e tentativi il soggetto impara infatti a conoscere quali movimenti volontari sono suscettibili di compensare quali cambiamenti; grazie alla relazione che lega i cambiamenti esterni compensabili attraverso lo stesso cambiamento interno sarebbe poi possibile raggruppare i cambiamenti esterni equivalenti in classi di *spostamenti*.

Per Poincaré questa «associazione per compensazione» esprime, da un punto di vista sensibile, una legge di gruppo, e in particolare quella del gruppo dei movimenti rigidi: «Se poi studiamo le leggi secondo cui si combinano tali operazioni, riconosciamo che queste ultime formano un *gruppo* che ha la medesima struttura di quello dei movimenti dei solidi invariabili.»[60]. Gli spostamenti infatti si compongono seguendo le stesse leggi di un gruppo di trasformazioni. È per questo motivo che –secondo Poincaré– lo spazio rappresentativo così formato costituisce un'approssimazione dello spazio geometrico. Lo spazio rappresentativo infatti, condivide con quello geometrico la legge di gruppo arrivando a collocarsi in una posizione intermedia fra l'esperienza e lo spazio geometrico ideale.

Considerare una serie di sensazioni significa dunque, come si è visto, prendere in esame le modificazioni che una sensazione subisce all'interno di un continuum percettivo. Affinché il soggetto percipiente possa ricondurre le diverse sensazioni a un medesimo oggetto, identificandolo come lo stesso all'interno del cambiamento, è necessario che esso abbia la possibilità di muoversi.

> Per esempio, nel caso della vista, se un oggetto si muove davanti al nostro occhio, possiamo «tenerlo d'occhio» e tramite opportuni movimenti del globo oculare conservarne l'immagine in uno stesso punto della retina.[61]

È solo attraverso il suo movimento infatti che il soggetto può rappresentarsi uno spazio. Poincaré insiste molto sul fatto che per esseri completamente immobili, incapaci di modificare la propria posizione, sarebbe impossibile qualunque rappresentazione spaziale. Riguardo alla nozione di spazio egli ad esempio sottolinea che

> Non soltanto tale nozione non può derivare da un'unica sensazione, bensì *da una successione di sensazioni,* ma un essere *immobile* non avrebbe mai potuto acquisirla dal momento che, non potendo *correggere* con i suoi movimenti gli effetti dei cambiamenti di

> posizione degli oggetti esterni, non avrebbe avuto alcuna ragione di distinguerli dai cambiamenti di stato.[62]

Senza il movimento sarebbe impossibile inoltre localizzare gli oggetti esterni:

> Del resto, che cosa intendiamo dire quando diciamo che "localizziamo" un tal oggetto in un tale punto dello spazio? *Intendiamo semplicemente dire che ci rappresentiamo i movimenti necessari per raggiungere quell'oggetto*.[63]

Ma anche cogliere le reciproche relazioni fra questi. Se non ci fossero cambiamenti di posizione, se dunque non si presentassero modificazioni di immagine, sarebbe impossibile intuire l'ordinamento interno al campo percettivo.

Del resto, l'importanza del ruolo del movimento all'interno delle considerazioni sulla costituzione dello spazio è già implicitamente presente nella stessa nozione di serie di sensazioni, così come nell'idea di spazio relazionale. Infatti, nota ancora Cassirer,

> Il concetto fondamentale, sul quale Descartes costruisce le sue considerazioni, è il concetto di movimento. […] Le diverse figure delle curve piane nascono in quanto a un determinato punto, da noi stabilito come elemento fondamentale, prescriviamo diverse specie di movimento rispetto a un asse orizzontale e a un asse verticale. Dalla determinazione e dalla composizione di questi movimenti devono potersi dedurre e definire in modo completo e univoco le linee, che in tal modo sono generate come "traiettorie" di punti. Qui, come si vede, il movimento non indica un fatto concreto, bensì un fatto puramente ideale: esso è l'espressione della sintesi in cui una molteplicità successiva di posizioni determinate, connesse in virtù di una legge, viene raccolta nell'unità di una figura spaziale.[64]

Il movimento risulta dunque importante, non solo da un punto di vista fisiologico, permettendo la costituzione di uno spazio percettivo, ma anche da un punto di vista matematico. Al riconoscimento della centralità del movimento nello studio dello spazio percettivo corrisponde infatti il riconoscimento della centralità del movimento all'interno dell'analisi matematica dello spazio. A partire da Descartes e attraverso Helmholtz, Lie e Klein il movimento, matematicamente reso dalla nozione di gruppo di trasformazioni, diviene il concetto cardine attraverso il quale studiare lo spazio.

Sia a livello percettivo che a livello matematico, l'analisi del movimento risulta dunque determinante al fine di una costituzione spaziale e la geometria diviene lo studio delle proprietà invarianti rispetto a un dato gruppo di trasformazioni.

5. Dall'esperienza allo spazio geometrico ideale: l'associazione per compensazione

La relatività psicologica dello spazio, che presenta diverse forme a seconda del sistema percettivo in atto, e l'importanza che Poincaré dà alle esperienze psicofisiologiche nella genesi stessa del concetto di spazio sono da attribuire agli studi in materia che dominano le maggiori riviste francesi del tempo, la *Revue de métaphysique et de morale*[65], ma soprattutto la *Revue philosophique de la France et de l'Etranger*, con la quale Poincaré collaborava assiduamente. Molti fisiologi infatti si inseriscono in questo periodo nel dibattito sui fondamenti della geometria. Ne sono un esempio il breve articolo di Andrade su «Les bases expérimentales de la Géométrie euclidienne»[66], pubblicato sulla *Revue philosophique de la France et de l'Etranger* nel 1891, o l'articolo del fisiologo Elie De Cyon, «Les bases naturelles de la géométrie d'Euclide»[67], comparso, sulla stessa rivista, nel 1901. Curiosa è anche la risposta data a quest'ultimo da Couturat[68] nello stesso numero. Interessanti sono inoltre, sempre di Couturat, gli «Etudes critiques sur l'espace et sur le temps de MM. Lechelas, Poincaré, Delboeuf, Bergson, L.Weber et Evellin»[69], comparsi nella *Revue de Métaphysique et de Morale* nel 1896. Questi studi dimostrano l'interesse che la nuova psicologia sperimentale indirizzava al dibattito sui fondamenti della geometria e rivelano il tentativo, da parte dei fisiologi, di applicare i risultati delle proprie ricerche alla spiegazione di questi ultimi. Non si conosce la formazione di Poincaré in proposito: egli cita Delbeuf, Couturat, De Cyon etc., ma si tratta il più delle volte di semplici accenni e non esiste un preciso riferimento alle opere o alle ricerche di nessuno di essi. Sicuramente però Poincaré si trova a stretto contatto con diversi rappresentanti di questo ricco dibattito. Non solo infatti collabora con le stesse riviste, ma dalla sua corrispondenza è possibile intuire quanto la vicinanza e l'amicizia del cognato Émile Boutroux[70], sia stata determinante per la formazione di Poincaré. È infatti attraverso Boutroux, con il quale è in contatto già nel 1877, che Poincaré conosce ad esempio Jules Tannery. Egli inoltre, come dimostra la sua corrispondenza con la madre e la sorella, frequenta l'ambiente culturale che si sviluppa intorno al cognato. Si può dunque ragionevolmente credere che Poincaré conosca, almeno in parte, le opere e le ricerche degli autori che questi ampiamente cita nei suoi lavori: fisiologi e psicologi del tempo come Henri-Etienne Beaunis, Théodore Jouffroy, Etienne-Jules Maray, Alexander Bain.

Dalla lettura delle sue lettere emergono inoltre rapporti con personalità quali Louis Liard o François Évellin con i quali intrattenne un rapporto epistolare a partire almeno dal 1881; così come qualche contatto, seppure di tipo amministrativo, con Alfred Binet e uno scambio epistolare con Couturat relativamente alle critiche di Poincaré a Russell.

È evidente inoltre come le analisi di Poincaré sulla genesi della nozione di spazio riflettano gli studi dell'associazionismo psicofisiologico, già dal 1895 infatti egli parla di *leggi di associazione*. Queste sono il risultato di abitudini derivate dall'esperienza; se infatti l'educazione dei sensi avvenisse in modo differente e l'uomo si trovasse, privo di «una qualsiasi educazione preliminare», in un mondo diverso dal nostro, potrebbe ricevere impressioni differenti ed essere portato a costruire uno spazio e una geometria diversi. È attraverso l'esperienza dunque che l'uomo educa i suoi sensi ed è portato a riconoscere le leggi attraverso le quali le sue impressioni si succedono. Proprio grazie a queste leggi, che non solo legano fra loro le diverse sensazioni, ma anche le associano a determinati movimenti, l'uomo è inoltre condotto alla nozione di spazio.

> Il senso dello spazio si riduce quindi a un'associazione costante fra certe sensazioni e certi movimenti, o la rappresentazione di questi movimenti. (È necessario, per evitare un equivoco rinascente di continuo, malgrado le mie reiterate spiegazioni, ripetere ancora una volta che non intendo con ciò la rappresentazione di questi movimenti nello spazio, ma la rappresentazione delle sensazioni che li accompagnano?).[71]

Lo spazio non ci è dato né nelle rappresentazioni sensoriali né in quelle motrici. Esso tuttavia è costruito sulla base di esse. Affinché questa costruzione sia possibile è però necessario che vengano presi in considerazione non semplicemente degli insiemi di sensazioni ma delle *serie*; che siano considerate allo stesso tempo sia serie di sensazioni esterne, visive o tattili, sia serie di sensazioni di movimento. È inoltre necessario che un'*associazione per compensazione* metta in correlazione le serie esterne e le serie muscolari. Questa deve essere tale per cui a ogni movimento volontario o involontario del proprio corpo corrisponda un'impressione, in modo che le serie cinestesiche siano in ogni circostanza accompagnate da serie di sensazioni.

Non si tratta di un'associazione che consente di trasferire alle rappresentazioni della vista e del tatto nozioni spaziali già presenti nella rappresentazione dei movimenti: quest'ultima infatti, non è una rappresentazione dei movimenti *nello spazio*, ma una rappresentazione delle sensazioni che accompagnano questi movimenti e che non presuppongono in alcun modo la nozione di spazio. È solo grazie all'associazione che le sensazioni *non spaziali* possono, nella loro successione, condurre alla costituzione dello spazio.

Si prenda ad esempio un oggetto in movimento. La sua immagine si formerà prima al centro della retina del soggetto e in seguito al suo bordo. Le due sensazioni saranno dunque condotte da due fibre nervose differenti, aventi origine in due punti diversi della retina.

> Perché dunque sono spinto a credere che queste due sensazioni, qualitativamente diverse, rappresentino una stessa immagine che si è spostata ? Perché posso *seguire l'oggetto con l'occhio* e perché, per via di uno spostamento volontario dell'occhio, accompagnato da sensazioni muscolari, posso ricondurre l'immagine al centro della retina e ristabilire la sensazione primitiva.[72]

È grazie all'associazione fra serie di sensazioni visive e serie di sensazioni cinestesiche, che è possibile identificare un oggetto e riconoscerlo come lo stesso nello spostamento. Questa associazione permette dunque di individuare delle invarianti del gruppo dei movimenti rigidi.

Realizzando un modello sensibile di questo gruppo, l'associazione, che opera su sensazioni di per sé estranee allo spazio, genera quindi lo spazio rappresentativo che costituisce un'approssimazione sensibile dello spazio geometrico. Attraverso l'associazione per compensazione Poincaré «Fornisce una risposta precisa e positiva alla domanda di Berkeley: è possibile costruire lo spazio a partire da sensazioni non spaziali?» [73].

Tuttavia, come sottolinea Vuillemin, il ruolo e l'importanza che Poincaré riserva all'associazione per compensazione, non autorizza a considerarlo un empirista. Questa infatti differisce notevolmente dall'associazione degli empiristi: l'associazione per compensazione è un'operazione attiva di un organismo sensibile attivo. Essa, al contrario di quella degli empiristi che si fonda solo sulla contiguità temporale e sulla somiglianza, è razionale ed esprime in modo sensibile una legge di gruppo. È solo grazie a questa legge puramente intellettuale che è possibile superare sia l'idealismo empirico di Berkeley, che la concezione kantiana dell'intuizione sensibile pura dello spazio che, come osserva Vuillemin, si oppone, a causa del suo essere data come forma passiva, all'attività dello spirito.

6. La teoria dei gruppi di trasformazioni

Già l'articolo del 1887 *Sur les hypothèses fondamentales de la géométrie* era ispirato alla teoria dei gruppi di trasformazioni di Sophus Lie, già in questo primo scritto infatti, le geometrie sono caratterizzate da un particolare gruppo di trasformazioni. Nelle osservazioni conclusive del testo Poincaré afferma, per la prima volta in un testo edito[74], che la geometria altro non è che lo studio di un gruppo e che, proprio per questo motivo, le verità delle diverse geometrie non sono incompatibili fra loro:

> La Geometria non è altro che lo studio di un gruppo e, in questo senso, si potrebbe dire che la verità della geometria di Euclide non è incompatibile con quella della geometria di Lobatchevski, poiché l'esistenza di un gruppo non è incompatibile con quella di un altro gruppo.[75]

Conformemente al programma di Erlangen la costituzione dello spazio sensibile passa per Poincaré attraverso la nozione astratta di gruppo, conducendo quindi alle diverse astratte geometrie che a ogni gruppo possono essere associate.

> Se si individua un certo numero di trasformazioni e le si combina in seguito in tutti i modi possibili, l'insieme di tutte queste combinazioni formerà ciò che chiamiamo gruppo. A ogni gruppo corrisponde una geometria, e la nostra, che corrisponde al gruppo degli spostamenti di un corpo solido, non è che un caso molto particolare.[76]

Tra tutti i possibili gruppi, l'uomo è portato a sceglierne uno particolare, al quale rapportare i fenomeni fisici. Ciò che guida la scelta è innanzitutto un criterio di semplicità, per il quale il gruppo scelto non è altro che il meno complesso.

> Ora, la geometria euclidea [...] è la più semplice; e non lo è soltanto per le nostre abitudini intellettuali o per non so quale intuizione diretta che avremmo dello spazio euclideo; è la più semplice in sé, proprio come un polinomio di primo grado è più semplice di un polinomio di secondo grado; le formule della trigonometria sferica sono più complicate di quelle della trigonometria rettilinea, e apparirebbero ancora tali agli occhi di un analista che ne ignorasse il significato geometrico.[77]

Ma se si sceglie il gruppo corrispondente alla geometria euclidea non è esclusivamente perché è il più semplice, ma anche perché le sue operazioni sono legate fra loro da relazioni molto simili a quelle che legano i diversi possibili movimenti dei corpi solidi. Non esiste dunque una geometria più vera, l'uomo è semplicemente portato, per comodità, a scegliere, fra tutti i gruppi possibili, quello che corrisponde alla geometria euclidea.

Sostenendo che esiste una scelta di gruppi di trasformazioni a partire dai quali vengono elaborate le diverse geometrie, Poincaré, pur non accettando il kantismo nella sua forma tradizionale, accetta l'esistenza di un *a priori* mentale che costituisce la forma della nostra conoscenza spaziale.

> Oggetto della geometria è lo studio di un "gruppo" particolare; ma il concetto generale di gruppo preesiste nella nostra mente, perlomeno in potenza. Esso si impone a noi, non come forma della nostra sensibilità, bensì come forma del nostro intelletto.[78]

Se dunque Poincaré rifiuta l'*a priori* kantiano come forma della sensibilità, egli tuttavia elabora una nuova concezione dell'*a priori*. Per Poincaré infatti i gruppi di trasformazioni sono già in qualche modo presenti, innati, nell'intelletto e a partire da questi gruppi sono possibili diverse geometrie e, di conseguenza, diverse concezioni dello spazio fisico. La nozione di gruppo quindi preesiste in qualche modo in potenza nell'intelletto e costituisce una forma del nostro modo di intendere.

Come sottolinea Cassirer infatti:

> [...] Se è il concetto di gruppo che dobbiamo fare entrare nella definizione di geometria, e se ogni geometria può essere designata come una teoria degli invarianti rispetto ad un gruppo determinato, allora, già nella determinazione del concetto di geometria, entra un elemento puramente aprioristico.[79]

Cassirer, che nel suo *Sostanza e funzione*[80] mostra l'importanza decisiva della nozione di gruppo per lo sviluppo dell'intera conoscenza scientifica, è il primo a sottolineare come questa assuma nell'opera di Poincaré il ruolo di vero e proprio *a priori*. È dunque innanzitutto grazie alla lettura che per primo ne dà Cassirer che è possibile vedere nel convenzionalismo di Poincaré una ridefinizione del concetto di *a priori* che, da forma della sensibilità, diventa forma dell'intelletto. La nozione di gruppo diviene infatti l'unico vero elemento *a priori*: senza di essa non ci sarebbe alcuna geometria, nella misura in cui non sarebbe possibile riconoscere le serie di sensazioni come gruppi di trasformazioni. Forma pura dell'intelletto, la nozione di gruppo, latente, emerge grazie all'esperienza e rende possibile, secondo Poincaré, la determinazione delle diverse geometrie.

7. Il ruolo dell’esperienza: la chiave del convenzionalismo

> Si constata che l’esperienza svolge un ruolo indispensabile nella genesi della geometria; sarebbe, però, un errore concluderne che la geometria è una scienza sperimentale, sia pure in parte.[81]

È nella definizione del ruolo dell’esperienza che risiede il profondo significato del convenzionalismo di Poincaré. Egli infatti, contrariamente agli empiristi, ritiene che spazio dell’esperienza e spazio geometrico, pur non privi di contatti e di reciproca influenza, siano due realtà distinte e che non sia dunque possibile alcuna diretta derivazione dell’uno dall’altro. Le idealità geometriche non sono, per Poincaré, semplici sensazioni o percezioni spogliate del loro carattere particolare e gli assiomi non possono in alcun modo essere considerati fatti sperimentali. La geometria risulterebbe dunque al riparo da qualunque refutazione così come priva di ogni possibile convalida; pur guidandoci nella scelta infatti, l’esperienza non la impone in modo univoco e non esiste alcun “esperimento cruciale” che consenta di dimostrare la verità di una geometria rispetto a un’altra:

> Se la geometria di Lobatchevskij è vera, la parallasse di una stella molto lontana sarà finita; se è vera quella di Riemann, sarà negativa. Sono risultati che sembrano accessibili all’esperienza e si è confidato nelle osservazioni astronomiche per poter decidere tra le tre geometrie.
> Ma ciò che l’astronomia chiama retta è semplicemente la traiettoria del raggio luminoso. Se dunque, per assurdo, fossero scoperte parallassi negative o fosse dimostrato che tutte le parallassi sono superiori a un certo limite, potremmo scegliere fra due conclusioni: rinunciare alla geometria euclidea oppure modificare le leggi dell’ottica, ammettendo che la luce non si propaghi rigorosamente in linea retta.
> Non c’è bisogno di aggiungere che tutti considererebbero quest’ultima soluzione più vantaggiosa.
> La geometria euclidea non ha dunque nulla da temere da nuove esperienze.[82]

La geometria dunque non ha nulla a che spartire con scienze sperimentali come la fisica, essa è una scienza pura e le sue proposizioni sono convenzioni, in alcun modo vincolate all’esperienza[83]: «La nozione di questi corpi ideali è interamente frutto della nostra mente e l’esperienza non costituisce che l’occasione che ci spinge a farla emergere.»[84].

La geometria dei solidi ideali è in tutto e per tutto risultato di un'attività dello spirito e l'esperienza non è che l'occasione che fa si che una geometria emerga. Fra tutti i possibili gruppi infatti l'uomo ne sceglie uno che costituisca il «campione» a cui rapportare i «fenomeni naturali».

« L'esperienza ci guida nella scelta, ma non ce la impone; non ci fa riconoscere qual è la geometria più vera, ma qual è quella più comoda.»[85]: la scelta fra i diversi possibili gruppi è guidata dall'esperienza, che può suggerire quale gruppo possa risultare più "comodo", ma che in alcun modo può esprimersi sulla sua verità. Come osserva Cassirer infatti:

> Il pensiero geometrico resta [...] determinato dall'esperienza, ma non è fondato su di essa. L'esperienza non è il mezzo per dimostrare le verità geometriche, ma può essere utile occasionalmente, fornendo l'opportunità e l'invito allo sviluppo di certi aspetti di tale verità ed alla scelta di una di esse, piuttosto che di un'altra.[86]

Cassirer è forse il primo a comprendere appieno il ruolo dell'esperienza all'interno del convenzionalismo e a difendere l'epistemologia di Poincaré dalle accuse di nominalismo. La posizione di Poincaré è infatti caratterizzata dall'assimilazione delle geometrie a "convenzioni linguistiche". Se le definizioni sono convenzionali, esse non sono tuttavia il risultato di una scelta arbitraria.

Lo stesso Poincaré sente più volte la necessità di distinguere la sua posizione dal "convenzionalismo" di alcuni suoi discepoli. Particolarmente preziosa a questo proposito è la terza parte de *La valeur de la science*, interamente dedicata alla filosofia di Édouard Le Roy. Per quest'ultimo infatti:

> La scienza non è fatta che di convenzioni, ed è solo a tale circostanza che deve la sua apparente certezza; i fatti scientifici, e, *a fortori*, le leggi sono l'opera artificiale dello scienziato; la scienza non può dunque farci apprendere nulla della verità;può soltanto servirci da regola di azione.[87]

Poincaré precisa come questa dottrina sia in realtà un "nominalismo", che poco ha a che fare con le sue posizioni. Lo scienziato non crea né il fatto bruto né il fatto scientifico, infatti «*Il fatto scientifico non è altro che il fatto bruto tradotto in un linguaggio comodo* […] *tutto ciò che lo scienziato crea in un fatto è il linguaggio con il quale lo enuncia*»[88].

Le proposizioni della geometria dunque non sono creazioni arbitrarie dell'uomo, «mero parto del suo capriccio»[89]. Esse sono piuttosto convenzioni che, irrefutabili da parte dell'esperienza, sono tuttavia allo stesso tempo scelte in base a criteri su di essa fondati. Non bisogna dunque confondere convenzionalismo con arbitrarietà:

> Le convenzioni sono opera della libera attività della nostra mente che in questo ambito non riconosce alcun ostacolo. Qui la nostra mente può affermare poiché decreta. Ma intendiamoci, questi decreti si impongono alla *nostra* scienza, che, senza di essi, sarebbe impossibile; non si impongono però alla natura. Sono, dunque, arbitrari? No, poiché senza il confronto con la natura sarebbero sterili. L'esperienza non ci toglie la nostra libera scelta, ma la guida aiutandoci a individuare la via più comoda. I nostri decreti sarebbero dunque come quelli di un principe assoluto, ma avveduto, che consulti il suo Consiglio di Stato.[90]

Andando oltre l'interpretazione nominalista, è possibile dunque rileggere il convenzionalismo di Poincaré considerando il "ruolo indispensabile" dell'esperienza in seguito a un doppio ragionamento. Da un lato, la ragione è incapace d'avere, tramite le sue sole risorse, un'intuizione delle forme o di un continuo amorfo, nel quale queste forme si situano. Essa può pervenire a una simile intuizione solo nel suo concreto muoversi nell'esperienza. Dall'altro lato, questa ragione, calata nell'esperienza, non avrebbe concepito alcuna geometria se non ci fossero stati i corpi solidi e se il movimento di questi non richiamasse la struttura del gruppo di trasformazioni euclideo. Come osserva Giedymin infatti

> Il ruolo dell'esperienza è duplice: i concetti e le assunzioni geometriche *trovano origine nell'esperienza*; dallo status di generalizzazioni empiriche idealizzate le assunzioni geometriche sono quindi elevate allo status di *principi convenzionali* o *convenzioni terminologiche*; inoltre, nelle *applicazioni della geometria metrica* siamo *guidati nella nostra scelta* da un sistema di geometria metrica dalla sua *semplicità* (in senso psicologico, pratico e matematico) e *convenienza*, ma anche da *considerazioni empiriche* relative alla semplicità e alla convenienza, per esempio, dalla nostra conoscenza dell'esistenza in natura dei corpi solidi i cui movimenti si avvicinano moltissimo alla struttura del gruppo Euclideo.[91]

La peculiarità del convenzionalismo geometrico di Poincaré risiede quindi nel particolare ruolo assunto dall'esperienza, che, pur non potendo rivelare nulla all'uomo riguardo allo spazio geometrico ideale, lo guida tuttavia nelle sue scelte e gli consente di individuare, all'interno dello spazio rappresentativo, delle proprietà invarianti. È solo attraverso questa individuazione che l'uomo è reso in grado di scegliere fra i diversi possibili gruppi di trasformazioni, quello euclideo, inteso come il più "comodo", vale a dire non solo il più semplice, ma anche quello che maggiormente si presta alla descrizione dei diversi movimenti dei corpi solidi osservabili nell'esperienza.

Alla base del convenzionalismo dimora quindi l'idea che l'esperienza giochi un doppio ruolo nella costituzione delle "convenzioni": essa è, da un lato, l'occasione che permette di conoscere le «relazioni tra le cose» e consente la presa di coscienza della possibilità d'introdurre delle convenzioni che trasformino le leggi in principi, infatti

> Come può una legge divenire un principio? Essa esprimeva una relazione tra due termini reali A e B. Ma non era rigorosamente vera, era solo un'approssimazione. Noi introduciamo arbitrariamente un termine intermedio C più o meno fittizio e C è *per definizione* ciò che ha con A *esattamente* la stessa relazione espressa dalla legge.
>
> La nostra legge si è allora scomposta in un principio assoluto e rigoroso che esprime la relazione di A con C e in una legge sperimentale approssimata e suscettibile di revisione, che esprime la relazione di C con B. È chiaro che, per quanto lontana si spinga questa scomposizione, resteranno sempre delle leggi.[92]

Dall'altro lato, l'esperienza serve, in seguito, a testare le norme così fissate. Una volta stabiliti dei principi, infatti, non è impossibile effettuarne una revisione. Quando questi cessano di essere fecondi, quando cioè non sono più in grado di prevedere fatti nuovi, l'esperienza, pur senza contraddirli direttamente, ne adotta di «più comodi»[93], di più adatti cioè a descrivere tanto i vecchi fatti, quanto i nuovi.

Relativamente alla geometria, questo significa che, attraverso l'esperienza, e quindi grazie alle sensazioni e al movimento, è possibile individuare, nello spazio rappresentativo, delle costanti che rimandano a proprietà invarianti rispetto a un dato gruppo di trasformazioni: quello euclideo. L'esperienza quindi, non solo ci permette di assimilare la struttura degli spostamenti a quella del concetto matematico di gruppo di trasformazioni, considerato come forma invariante delle diverse geometrie, ma ci suggerisce anche quale, fra tutti i gruppi possibili, meglio si adatta all'interpretazione del nostro spazio percettivo.

Conclusioni

Nella sua *Estetica Trascendentale*[94], Kant mostra come, attraverso le intuizioni pure di spazio e tempo, la molteplicità delle sensazioni, materia empirica delle nostre intuizioni, sia ordinata e determinata in precisi rapporti, portandoci a collocare i fenomeni esterni in uno spazio soggettivo le cui proprietà sono necessariamente guidate dalla geometria di Euclide. La geometria, dunque, per Kant, necessariamente euclidea e applicata sistematicamente a ogni genere di fenomeno, risulta a priori ed empiricamente incontestabile.

Gli sviluppi geometrici che hanno caratterizzato la matematica nel passaggio dal XIX al XX secolo, hanno dimostrato però la coerenza delle geometrie non-euclidee e la possibilità di un loro utilizzo per la spiegazione del mondo fisico, mettendo inevitabilmente in crisi l'ipotesi di Kant secondo cui la mente sarebbe dotata a priori di forme dell'esperienza che condurrebbero l'uomo a collocare i fenomeni in un continuum tridimensionale euclideo[95].

Il convenzionalismo geometrico di Poincaré può essere visto, in questo contesto, proprio come un tentativo di rimodellare quegli aspetti della filosofia kantiana messi in difficoltà dalla nascita di nuovi sistemi geometrici.

Si è visto come per Poincaré esistano due tipi di spazio e come lo spazio rappresentativo sia costruito, in modo empirico, a partire dalle sensazioni, senza presupporre alcuna nozione di spazio. Si è mostrato poi come, unicamente sulla base dei diversi tipi di cambiamento a cui sono soggette le serie di sensazioni e, in particolare, dalla divisione dei «cambiamenti interni» in classi di equivalenza tali per cui tutti gli elementi della stessa classe correggono lo stesso «cambiamento esterno», Poincaré individui i gruppi di spostamenti che caratterizzano lo spazio rappresentativo, la cui struttura ci è quindi in qualche modo imposta dalle percezioni.

È a questo punto che Poincaré fa intervenire la nozione di *gruppo di trasformazioni*. Le sensazioni infatti, tutte qualitativamente diverse, sono classificate secondo la loro natura e, quelle della stessa specie, ordinate secondo una sorta di scala di intensità. Una tale classificazione però non può essere effettuata senza «un intervento attivo della mente» che rapporta le sensazioni «a una sorta di rubrica o di categoria che preesiste in noi»[96]. Questa categoria però, che non è altro se non la nozione matematica di gruppo di trasformazioni, non è una forma a priori della sensibilità: contrariamente alle intuizioni pure kantiane, la nozione di gruppo non si impone alla nostra sensibilità, le nostre sensazioni infatti, considerate individualmente, potrebbero esistere anche senza di essa. Questa categoria ci è necessaria solo per confrontare le nostre sensazioni e ragionare su di esse, è quindi piuttosto una forma del nostro intelletto.

Forma a priori, che ci consente di scegliere fra tutte le geometrie logicamente valide quella più comoda per interpretare lo spazio in cui ci troviamo, la nozione di gruppo emerge grazie all'esperienza, senza per questo che essere determinata da essa. Infatti, «abbiamo in noi, in potenza, un certo numero di modelli di gruppi e l'esperienza ci aiuta solo a scoprire quale fra questi modelli si allontana meno dalla realtà»[97].

Ed è proprio sul ruolo giocato dalla nozione di gruppo in matematica che si fonda il convenzionalismo geometrico di Poincaré. Attraverso la nozione di gruppo emerge infatti come teorie matematiche completamente diverse per quanto riguarda i loro oggetti propri, possano essere identiche dal punto di vista strutturale. A ogni teoria matematica corrisponde un certo gruppo di trasformazioni che si applica agli elementi della teoria. Questo gruppo ha una "struttura" o "forma" costituita da tutte le trasformazioni del gruppo, unite alle operazioni secondo cui un gruppo opera su un oggetto matematico (sia esso un piano, uno spazio, una funzione…). Due gruppi sono isomorfi se, per quanto diversi relativamente al loro oggetto, presentano la stessa struttura. Infatti, dato un gruppo e un insieme di oggetti su cui può operare, si possono far variare gli elementi dell'insieme, pur conservandone le proprietà essenziali: queste proprietà sono dette *invarianti* rispetto al gruppo di trasformazioni in questione. La struttura del gruppo esprime quindi in qualche modo la "permanenza nel cambiamento" delle proprietà caratteristiche dell'oggetto matematico in questione: anche modificandone gli elementi costitutivi, le trasformazioni a cui è soggetto non ne alterano le proprietà e le relazioni caratteristiche.

È chiaro che non si tratta di un evento arbitrario: le stesse proprietà caratteristiche di un oggetto matematico qualunque possono essere invarianti rispetto a un gruppo e non esserlo rispetto a un altro. È questo il motivo per cui lo spazio rappresentativo suggerisce un'approssimazione con il gruppo euclideo piuttosto che con qualunque altro ed è quindi questa una delle ragioni per cui Poincaré afferma che la geometria euclidea è la più comoda per rappresentare lo spazio della nostra esperienza.

> Fra tutti i movimenti concepibili ve ne sono alcuni di cui i geometri euclidei dicono che non sono accompagnati da deformazione; ma ve ne sono altri di cui i geometri non euclidei direbbero che non sono accompagnati da deformazione. Nei primi, detti movimenti euclidei, le rette euclidee restano rette euclidee, e le rette non euclidee non restano tali; nei movimenti della seconda specie, o movimenti non euclidei, le rette non euclidee restano non euclidee e le rette euclidee non restano tali. Non si è dunque dimostrato che sarebbe irragionevole chiamare rette i lati dei triangoli non euclidei; si è dimostrato soltanto che ciò sarebbe irragionevole se si continuasse a chiamare movimenti senza deformazione i movimenti euclidei; ma si sarebbe dimostrato altrettanto bene che sarebbe irragionevole chiamare rette i lati dei triangoli euclidei, se si chiamassero movimenti senza deformazione i movimenti non euclidei.
>
> Ora, quando diciamo che i movimenti euclidei sono *veri* movimenti senza deformazione, che vogliamo dire? Vogliamo dire semplicemente che essi sono *più notevoli* degli altri; e perché lo sono? Perché certi corpi naturali notevoli, i corpi solidi, subiscono dei movimenti pressappoco simili.[98]

Il gruppo euclideo conserva invarianti certe proprietà (ad esempio trasforma la retta euclidea in un'altra retta euclidea e, quando agisce sui corpi solidi, non ne altera la forma); nel caso di un gruppo non-euclideo, le proprietà mantenute invarianti sono invece altre (le rette euclidee ad esempio non rimangono tali, ma quelle non-euclidee restano rette non-euclidee). Ora, per chi ragioni a partire dalla geometria di Euclide, i "veri" movimenti senza deformazione saranno i movimenti euclidei, mentre per chi abbia come punto di partenza la geometria non-euclidea, i movimenti non-euclidei. Fra tutti i movimenti concepibili, quelli in cui noi ci imbattiamo nella nostra esperienza, i movimenti cioè che conservano invariante la forma dei corpi solidi, sono «pressappoco uguali» ai movimenti euclidei.

Ciò non significa, come si è visto, che la geometria euclidea sia più vera delle altre. Anzi, chiedersi se la geometria euclidea è vera non ha più senso del domandarsi se sia vero il sistema metrico e false le misure utilizzate anticamente o se siano vere le coordinate cartesiane e false quelle polari[99]: tutte le geometrie sono ugualmente vere e non si tratta di definire quale, fra tutte, sia la più vera, ma quale la più comoda.

Potremmo infatti immaginarci uno spazio non euclideo, vale a dire un mondo i cui oggetti naturali avrebbero pressapoco la forma delle rette non-euclidee e sarebbero affetti da movimenti senza deformazione simili a quelli non-euclidei.. Meglio ancora, possiamo addirittura affermare che:

> Esseri dalla mente uguale alla nostra e dotati dei nostri sensi, ma privi di una qualsiasi educazione preliminare, potrebbero ricevere da un mondo esterno opportunamente scelto impressioni tali da essere condotti a costruire una geometria diversa da quelle di Euclide e a localizzare i fenomeni di questo mondo esterno in uno spazio non euclideo o addirittura in uno spazio a quattro dimensioni
> Noi che siamo stati educati dal nostro mondo attuale non avremmo difficoltà, qualora fossimo trasportati in quel nuovo mondo, a riferirne i fenomeni al nostro spazio euclideo. Viceversa, se quegli esseri fossero trasportati nel nostro mondo, sarebbero condotti a riferire i nostri fenomeni allo spazio non euclideo.
> Che dico? Con qualche sforzo potremmo farlo anche noi. Qualcuno che vi consacrasse la propria esistenza potrebbe forse riuscire a rappresentarsi la quarta dimensione.[100]

È quindi una questione di educazione. Non riguarda la struttura delle nostre percezioni (e quindi una qualche forma a priori della sensibilità) perché altrimenti gli "esseri dalla mente uguale alla nostra" costruirebbero una geometria uguale alla nostra. Ma nemmeno possiamo dire che la geometria ci sia imposta dall'esperienza: educati nel nostro mondo e poi trasportati in un altro opportunamente scelto, riferiremmo i fenomeni a uno spazio diverso, non euclideo; allo stesso modo, gli esseri cresciuti in quel mondo, rapporterebbero i fenomeni del nostro a uno spazio euclideo.

Poincaré parla a questo proposito di *esperienza ancestrale*:

> Ma cosa si vuol dire con questa espressione? Si vuol forse dire che non possiamo dimostrare sperimentalmente il postulato di Euclide, ma che i nostri antenati sono stati capaci di farlo? Affatto. Si vuol dire che la nostra mente si è *adattata* per selezione naturale alle condizioni del mondo esterno, che ha adottato la geometria *più vantaggiosa* per la specie, o, in altri termini, *la più comoda*. Ciò è pienamente conforme alle nostre conclusioni: la geometria non è vera, la geometria è vantaggiosa.[101]

Per noi è più comodo rappresentarci i fenomeni in uno spazio euclideo perché lo spazio delle nostre esperienze, lo spazio rappresentativo, ci mostra dei solidi che si muovono secondo un gruppo che possiede una struttura assimilabile a quella del gruppo euclideo. Questo non significa che non possiamo rappresentarci gli stessi fenomeni in uno spazio diverso, ma solo che ci è meno comodo.

Ciò non vuol dire che la geometria non euclidea sia «un vano esercizio di logica», afferma infatti Poincaré: «Ma non è tutto. Poiché è suscettibile di un'interpretazione concreta, la geometria di Lobačevskij smette di essere un vano esercizio di logica e può avere delle applicazioni» e accenna, a titolo di esempio, al «vantaggio che Felix Klein» e lui ne hanno «tratto per l'integrazione delle funzioni lineari»[102]. Ma se le geometrie sono tutte ugualmente vere e passibili di un'interpretazione concreta, come deve essere interpretata la tanto discussa affermazione secondo cui la geometria non avrebbe nulla da temere da nuove esperienze[103]?

Si ritiene che Poincaré si riferisca alla geometria dello spazio in cui collochiamo abitualmente i fenomeni della nostra esperienza. È difficile infatti pensare che la geometria con la quale ragioniamo sui fatti della nostra esperienza possa essere un giorno diversa da quella di Euclide: si è detto come i movimenti dei corpi solidi con i quali ci imbattiamo quotidianamente siano assimilabili ai movimenti euclidei e ci conducano per questo alla costituzione di uno spazio di tipo euclideo; si è visto inoltre come, per Poincaré, una sorta di esperienza ancestrale ci condurrebbe a considerare questa geometria la più vantaggiosa, anche qualora ci imbattessimo in fatti che sembrerebbero a prima vista contraddirla.

Non si ha modo di approfondire qui il ruolo e il significato assunti dalle teorie fisiche nella concezione di Poincaré, né il rapporto fra geometria e fisica e il valore da attribuire a quella che Poincaré stesso definisce la "quarta geometria". Tuttavia, si crede non solo che il convenzionalismo geometrico di Poincaré vada ripensato, in modo nuovo, attraverso una rilettura del ruolo assegnato dal matematico francese alla nozione di gruppo di trasformazioni; ma che, insieme all'adesione di Poincaré all'elettromagnetismo, la funzione assunta da questa stessa nozione all'interno delle sue considerazioni fisiche sulle trasformazioni di Lorentz, mostri come –nel caso della fisica- il termine "convenzionalismo" usualmente associato al suo pensiero, sia spesso stato d'ostacolo a una piena comprensione della sua posizione epistemologica.

Bibliografia

Andrade, J., 1891, «Les bases expérimentales de la Géométrie euclidienne», *Revue philosophique de la France et de l'Etranger*, XXXI (1891), pp.430-432

Bain, A., 1855, *The senses and the intellect*, Longmans Green and Co., London, 3. ed., 1894

—, 1859, *The emotions and the will*, Longmans, London, 3. ed., 1880.

Bolyai, J., 1832-1833, «Appendix. Scientiam Spatii Absolute Veram exhibens: a veritate aut falsitate Axiomatis XI Euclidei (a priori haud unquam decidenda) independentem: adjecta ad casum falsitatis, quadratura circuli geometrica» in Bolyai, F., *Tentamen Iuventutem studiosam in elementa matheseos purae elementaris ac sublimioris methodo intuitiva evidentiaque huic propria introducendi*, Ediderunt Iulius König et Mauritius Rethy, (Iosephus Kürschak, Bela Totössy de Zepethnek). Budapest, Akademie der Wissenschaften, 1894 – 1897 (ed. it. a c. di G.Battaglini,1868, «Sulla scienza dello spazio assolutamente vera, ed indipendente dalla verità o dalla falsità dell'assioma XI di Euclide» in *Giornale di matematiche* 6, 97-115)

Cassirer, E., 1910, *Substanzbegriff und Funktionsbegriff. Untersuchungen uber die Grundfragen der Erkenntniskritik,* Berlin, 1910. Trad. it.: *Sostanza e funzione. Sulla teoria della relatività di Einstein,* (tr. it. di E. Arnaud e G. A. De Toni, La Nuova Italia, Firenze 1973)

—,1911-1920, *Erkenntnisproblem in der Philosophie und Wissenschaft der neuren Zei*t, vol. IV, Stuttgart 1957 (tr. it. *Storia della filosofia moderna*, IV, «Il problema della conoscenza nei sistemi posthegeliani», Giulio Einaudi editore, Torino 1958)

Cesca, G., 1883, *Le teorie nativistiche e genetiche della localizzazione spaziale*, Drucker e Tedeschi, Verona e Padova

Couturat, L., 1896, «Etudes critiques sur l'espace et sur le temps de MM. Lechelas, Poincaré, Delboeuf, Bergson, L.Weber et Evellin», *Revue de Métaphysique et de Morale*, IV (1896), pp.646-669

—, 1901, «Sur les bases naturelles de la géométrie d'Euclide» *Revue Philosophique de la France et de l’Etranger*, LII (1901), pp. 540-542

De Cyon, E., 1901, «Les bases naturelles de la géométrie d’Euclide», *Revue Philosophique de la France et de l’Etranger*, LII (1901), pp.1-30

Delbouef, J., 1875, *Théorie générale de la sensibilité*, F. Hayez, Bruxelles

—, 1876, *La psychologie comme science naturelle, son présent et son avenir: application de la méthode expérimentale aux phénomènes de l'âme*, C. Muquardt, Bruxelles

—, 1877, «Du rôle des sens dans la formation de l’espace. Pourquoi les sensations visuelles sont étendues», *Revue philosophique de la France et de l’Etranger,* pp. 166-183

—, 1893, «L’ancienne et les nouvelles géométries. Première étude», *Revue philosophique de la France et de l’Etranger*, tome XXXVI, pp.449-484

—, 1894a, «L’ancienne et les nouvelles géométries», *Revue philosophique de la France et de l’Etranger*, tome XXXVII, pp.354-382

—, 1894b, «L’ancienne et les nouvelles géométries. Troisième étude», *Revue philosophique de la France et de l’Etranger*, tome XXXVIII, pp.113-147

—, 1895, «L’ancienne et les nouvelles géométries», *Revue philosophique de la France et de l’étranger*, tome XXXIX, pp.345-371

—, 1897, *La Géométrie euclidienne sans le postulatum d'Euclide*, F. Hayez, Bruxelles

Enriques, F., 1906, *Problemi della scienza*, Bologna, Zanichelli, 2. ed.1909 (rist. anastatica 1926)

Gauss, C.F., 1827, «Disquisitiones generales circa superfieies curvas», *Commentationes Societatis Regiae Scientiarum Gottingensis Receniores* (8 ottobre 1827), vol. VI, 1828, pp. 99-146 (anche in *Werke*, vol.IV, 1873, pp.217-258)

Giannini, G., 2004, *Il problema dello spazio. Per un confronto fra Edmund Husserl e Henri Poincaré*, tesi di laurea in Filosofia, Università degli Studi di Milano

Giedymin, J., 1892, *Science and Convention: Essays on Henri Poincaré's Philosophy of Science and the Conventionalist Tradition*, Pergamon Press, Oxford

Helmholtz, H., 1868, «Über die Tatsachen, die der Geometrie zugrunde liegen», in *Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, 9 (1868), pp. 193-221; ora in *Schriften zur Erkenntnistheorie* (1921), a c. di P. Hertz, M. Schlick, Springer, Berlin 1998, pp. 59-78 (tr. it. a c. di V. Cappelletti, «Sui fatti che stanno a fondamento della geometria», in *Opere di Hermann von Helmholtz*, UTET, Torino 1967, pp. 420-444)

—, 1870, «Über den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome», in *Vortrage und Reden*, a c. di F. Vieweg und Sohn, Braunschweig 1896, vol. II pp. 1-32 (tr. it. a c. di V. Cappelletti «Sull'origine e il significato degli assiomi geometrici» in *Opere di Hermann von Helmholtz*, cit., pp. 591-534)

—, 1878, «Die Thatsachen in der Wahrnehmung», in *Vorträge und Reden*, cit., vol. II pp. 213-248, (tr. it. a c. di V.Cappelletti, «I fatti nella percezione», in *Opere di Hermann von Helmholtz*, cit., pp. 583-646)

Husserl, E., 1973, *Ding und Raum. Vorlesungen* 1907, hrsg. von U.Claesges, XVI Husserliana, Martinus Nijhoff, The Hague

—, 1983, «Philosophische Versuche über den Raum», in *Studien zur Arithmetik und Geometrie. Texte aus dem Nachlß*, hrsg von Nachlass, XXI Husserliana (tr. it. *Libro dello spazio*, a cura di V.Costa, Guerini, Milano 1996)

Kant, I., 1871, *Kritik der reinen Vernunft*, in *Gesammelte Schriften*, Akademieausgabe, Bd. 3 (hrsg. v. Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften), Berlin, Reimer Verlag, 1911 (tr. it. A cura di G. Genitle e G. Lombardo-Radice, *Critica della Ragion Pura*, Laterza, Bari, 1966)

Le Roy, E., 1901, «Science et Philosophie», in *Revue de Métaphysique et de Morale* (1901), 9

Lobatchevskij, N.I., 1835-1838, *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien*, Finckl, Berlin, 1840 (tr. ingl. in R.Bonola, *Non-Euclidian Goemetry*, Dover (ristampa), 1953: tr. ingl. con aggiunte di *La geometria non-euclidea*, Zanichelli, Bologna 1906); (tr. it. a cura di L.Lombardo-Radice, *Nuovi principi della geometria con una teoria completa delle parallele*, con una prefazione di E.Agazzi, Bollati Boringhieri, Torino, 1994)

Lotze, H., 1877, «De la formation de la notion d'espace», *Revue philosophique de la France et de l'Etranger*, tome IV, pp. 345-365

Mach, E., 1896, 1900, *Die Analyse der Empfindungen und das Verhaltnis des Physischen zum Psychischen*, Jena, Fischer, 1903 (tr. it. a c. di L. Sosio, *L'analisi delle sensazioni e il rapporto fra fisico e psichico*, Feltrinelli/Bocca, Milano 1975)

Metzger, W., 1930, «Optische Untersuchungen am Ganzfeld: II. Zur Phanomenologie des homogenen Ganzfelds» *Psychologische Forshung,* 13, 6-29

—, 1941, *Psycologie*, Dietrich Steinkopff, Darmstadt (tr. it. a cura di Gaetano Kanizsa, *I fondamenti della Psicologia della Gestalt*, Firenze, Giunti Barbera, 1984)

Nye, M.J.,1979, «The Boutroux Circle and Poincaré's conventionalism», *Journal for the History of Ideas*, 40, pp. 107-120

Poggi, S., 1977, *I sistemi dell'esperienza*, Il Mulino, Bologna

Poincaré, J.H., 1985, «L'espace et la géométrie», *Revue de métaphysique et de morale*, III, pp. 631-646, pubblicato anche in H.Poincaré,*La science et l'hypothèse*, Flammarion, Paris 1968, cap.IV

—, 1887, «Sur les hypothèses fondamentales de la géométrie», in *Bulletin de la société mathématique de France,* tome 15, pp. 203-216

—, 1898, «On the Foundations of Geometry», *The Monist*, 9, pp. 1-43. (Traduzione di Thomas J. McCormack a partire dal manoscritto di Poincaré. Ritraduzione francese, *Des fondements de la géométrie*, Paris, Chiron. Questo testo è in parte ripreso nel capitolo V de *La science et l'hypothèse*)

—, 1900, «Sur les principes de la géométrie. Réponse à M. Russell», *Revue de métaphysique et de morale*, 8, pp. 73-86

—, 1902a, *La science et l'hypothèse,* Flammarion, Paris, 1968 (tr. it. a c. di C. Sinigaglia, *La scienza e l'ipotesi*, Bompiani, Milano 2003)

—, 1902b, «Les fondements de la géométrie», *Journal des savants*, (1902), pp. 252-271; pubblicato anche in *Oeuvres*, tome XI, pp. 92-113

—, 1903, «L'espace et ses trois dimensions», *Revue de métaphysique et de morale*, 11, pp. 281-301 e pp. 407-429. Ripreso anche in *La valeur de la science*, capitoli III e IV

—, 1905, *La valeur de la Science*, Flammarion, Paris 1970 (tr. it. a c. di G. Polizzi, *Il valore della scienza*, La Nuova Italia, Firenze 1994)

—, 1908, *Science et méthode*, Flammarion, Paris (tr. it. a cura di C. Bartocci, *Scienza e metodo*, Einaudi, Torino 1997)

—, 1912a, «Pourquoi l'espace a trois dimensions», *Revue de métaphysique et de morale*, 20, pp. 483-504. Pubblicato anche in *Dernières pensées*, capitolo III

—, 1912b, «L'espace et le temps», *Scientia (Rivista di Scienza)*, 12, pp. 159-171. Pubblicato anche in *Dernières pensées*, capitolo II

—, 1913, *Dernières Pensées*, Flammarion, Paris

—, 1997, *Trois suppléments sur la découverte des fonctions fuchsiennes*. Ed. and intr. by J. Gray and S. Walter. Berlin: Akademie-Verlag. Publications des Archives Henri-Poincaré, Vol. 2.

Riemann, B., 1854, «Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen», in *Bernhard Riemann Gesammelte mathematische Werke, wissenschaftlicher Nachlass und Nachträge*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York (etc), Fac-simile dell'edizione di Leipzig: B.G. Teubner, 1892, pp.304-319 (tr. it. a cura di R. Pettoello, «Sulle ipotesi che stanno alla base della geometria», in *Sulle ipotesi che stanno alla base della geometria e altri scritti scientifici e filosofici*, Bollati Boringhieri, Torino 1994, pp. 3-20)

Spinicci, P., 2000, *Sensazione, percezione, concetto*, Il Mulino, Bologna

Stumpf, C., 1873, *Über den psychologischen Ursprung der Raumvorstellung,* Leipzig

—, *Psicologia e Metafisica. Sull'analiticità dell'esperienza interna*, a cura di V.Fano, Ponte alle Grazie, Firenze, 1992

Taine, H.,1870, *De l'intelligence*, Librairie Hachette, Paris

Vuillemin, J., 1996, «L'espace représentatif selon Poincaré», in *Henri Poincaré: Science et philosophie,* a cura di Greffe J-L., Heinzmann G., Lorenz K., Publikationen des Henri-Poincare-Archivs, Akademie Verlag, Berlin

Weyl, H., 1923, *Mathematische Analyse des Raumproblem*, Berlin, Springer 1923 (tr. it. a cura di A. Loinger, *Analisi matematica del problema dello spazio*, Zanichelli, Bologna, 1991)

Wundt, W., 1883, *Logik. Eine Untersuchung der Prinzipien der Erkenntinis und der Methoden wissenschaftlicher Forschung*, Ferdinand Enke, Stuttgart 1924, p. 488.

—, 1896, *Grundriss der Psychologie*, Leipzig, Verlag von Wilhelm Engelmann (tr. it. a cura di L. Agliardi, *Compendio di Psicologia*, Carlo Clausen, Torino 1900).

Note

[1] Poincaré (1898).
[2] Poincaré (1900).
[3] Poincaré (1903).
[4] Poincaré (1907).
[5] Poincaré (1912a).
[6] Poincaré (1912b).
[7] Si veda in particolare Gauss (1827).
[8] Si rimanda a Riemann (1854).
[9] Si veda, fra gli altri, Lobatchevskij (1835-1838).
[10] Si rimanda a Bolyai, J. (1832-1833).
[11]Per un'analisi dello sviluppo e delle ricerche dell'associazionismo psicofisiologico e della nuova psicologia sperimentale si rimanda a Poggi (1977), Spinicci (2000), o ancora Cesca (1883).
[12] Enriques (1906).
[13] Di Hermann Von Helmholtz si segnalano in particolare: Helmholtz (1868), Helmholtz (1870) e Helmholtz (1878).
[14] Di Alexander Bain si vedano, in particolare, Bain (1855) e Bain (1859).
[15] Si rimanda in particolare a Taine (1870).
[16]Di Joseph Delbouef si vedano, fra gli altri, Delbouef (1875), Delbouef (1897), o ancora Delboeuf (1876); si rimanda inoltre ad alcuni articoli pubblicati sulla *Revue philosophique de la France et de l'Etranger*: Delboeuf (1893), Delboeuf (1894a), Delboeuf (1894b), Delboeuf (1895), o ancora Delboeuf (1877).
[17] Un'eccezione a questo riguardo è costituita da R. Hermann Lotze che elabora una teoria psicologica della genesi della rappresentazione di spazio basata sui segni locali. Si veda, fra gli altri, a questo proposito, Lotze (1877); per la letteratura critica si rimanda invece a Poggi (1977).
[18] Wundt (1896, tr. it. 92).
[19] «[…] die ohne physische Objekte mit den ihnen in der Erfahrung zukommenden Eigenschaften nicht möglich wären.» Wundt (1883, 488) trad. nostra.
[20] Stumpf (1873).
[21] Si veda a questo proposito la prefazione di Vincenzo Fano a Stumpf (1992).
[22] Ivi, p.11.
[23] C. Stumpf, *Erscheinungen und psychische Funktionen*, *Abhandlungen Sitzungsberichte der bayrischen preußischen Akademie der Wissenschaften,* 1906, comparso nel 1907; trad. it. in C. Stumpf 1992, p. 73-74.
[24] Sin dal *Saggio per una nuova teoria della visione* (1732), Berkeley polemizza contro il carattere matematico di qualità come la distanza –ovvero lo spazio- e la grandezza –ossia l'estensione. Egli nega, infatti, che la distanza e la grandezza degli oggetti che si percepiscono mediante la vista siano determinabili in base a leggi ottiche aventi carattere geometrico. La nozione di queste qualità è invece data dall'esperienza: è solo l'abitudine a riferire determinate idee visive –e quindi determinate posizioni degli occhi- alla presenza di particolari grandezze o distanze. A riprova di ciò Berkeley adduce il fatto che –come avevano recentemente provato alcune relazioni scientifiche lette alla Royal Society- un cieco nato, cui sia restituita la vista con un'operazione chirurgica, non è in grado di percepire immediatamente, senza esperienze pregresse, la distanza che lo separa dagli oggetti che vede per la prima volta, come invece dovrebbe avvenire se tale distanza risultasse oggettivamente e matematicamente dalle leggi ottiche che presiedono la visione.
[25] Husserl (1973).
[26] Husserl (1983).
[27] Si rimanda a questo proposito a Giannini (2004).
[28] Poincaré (1887).
[29] Riemann (1854).
[30]« […] il existe dans la nature des corps remarquables qu'on appelle les solides et l'expérience nous apprend que les divers mouvements possibles de ces corps sont liés à fort peu près par les mêmes relations que les diverses opérations du groupe [euclidien]. » Poincaré (1887, 215), trad. nostra.
[31] Poincaré (1895).
[32] Si veda H.Weyl (1923).

[33] Enriques (1906, 179).
[34] Mach, (1896-1900, 172-173).
[35] Ivi, p. 174.
[36] Ivi, p. 181.
[37] Poincaré (1902a, tr. it. 89).
[38] Poincaré (1902a, tr. it. 97).
[39] Poincaré (1898).
[40] Filosofo e psicologo scozzese. Insegnante di Logica a Aberdeen, fondò la rivista *Mind*, la prima a occuparsi, insieme, di filosofia e psicologia.
[41] Cesca (1883).
[42] Storico, saggista e filosofo francese, fu professore di Estetica e Storia dell'arte alla Scuola di Belle Arti di Parigi.
[43] Oltre ai suoi contatti con le riviste di psicologia del tempo (che saranno analizzati nel paragrafo 5), Poincaré riporta, facendo esplicito riferimento all'autore, nel capitolo sulla relatività dello spazio del suo *Science et Methode*, alcune osservazioni esposte da Delboeuf nel suo *Megamicros ou les effets sensibles d'une réduction proportionnelledes dimensions de l'Universe*, testo pubblicato da quest'ultimo nel 1894; Poincaré cita inoltre Taine in una lettera a Le Bon del 1902. Dal canto suo Husserl, formatosi a stretto contatto con Stumpf, non può ignorare l'opera di Bain che proprio in Stumpf ha incontrato diverse critiche.
[44] Poincaré (1905).
[45] Poincaré (1903).
[46] Poincaré (1912).
[47] In termini matematici infatti, se le sensazioni muscolari che accompagnano lo sforzo di accomodamento e la convergenza degli occhi non concordassero sempre le due variabili che accompagnano queste sensazioni ci apparirebbero indipendenti «[…] e se questo accade, se le due sensazioni muscolari variano una indipendentemente dall'altra, dovremo tenere conto di una variabile in più e lo 'spazio visivo completo' ci apparirà come un continuo fisico a quattro dimensioni». Poincaré (1902a, tr. it. 93). Per una spiegazione più dettagliata si veda anche Poincaré (1905, capIII, § 6).
[48] Poincaré (1885, tr. it. 91).
[49] Ciò è vero se si omettono i casi di condizioni estreme come quelle di un soggetto immerso in un campo di stimolazione omogenea. Ha infatti mostrato Metzger attraverso i suoi esperimenti sul Ganzfeld come nel caso di una stimolazione artificiale completamente omogenea, ad esempio nel caso in cui l'osservatore si trovi di fronte a una superficie perfettamente omogenea, priva di qualunque apprezzabile discontinuità, illuminata in modo uniforme e sufficientemente grande da estendersi oltre il suo campo visivo,il soggetto percepisca una sorta di nebbia, completamente omogenea e infinita. Metzger (1930).
[50] Poincaré (1905, tr. it. 80).
[51] Poincaré (1902a, tr. it. 95).
[52] Poincaré (1908, tr. it. 91).
[53] Poincaré (1902a, tr. it. 95).
[54] «It is with reference to the definition of the point and the determination of the number of dimensions that new light appears to me most needed; but I deem it opportune, nevertheless, to take up the question from the beginning.», Poincaré (1898, 1), trad. nostra.
[55] «Our sensations cannot give us the notion of space [...] Sensations by themselves have no spatial character» Poincaré (1898, 1), trad. nostra.
[56] Poincaré (1903).
[57] Poincaré (1905, tr. it. 91).
[58] Per la psicologia sperimentale la cinestesia è la sensibilità relativa al movimento del proprio corpo, l'insieme delle sensazioni provocate dal movimento dei propri muscoli, in particolare dalla contrazione dei muscoli volontari. Si tratta di un tipo di sensibilità che ci fornisce informazioni sui nostri movimenti nel momento stesso in cui hanno luogo, permettendoci di conoscere la posizione del nostro corpo e di ogni suo membro in qualunque momento. Una grande importanza ai dati cinestesici all'interno della costituzione spaziale è stata data, fra gli altri, da Edmund Husserl, che parla, a questo proposito di un vero e proprio «sistema cinestesico».
[59] Poincaré (1902a, tr. it. 99), corsivo dell'autore.
[60] Poincaré (1902a, tr. it. p.113), corsivo nostro.
[61] Poincaré (1902a, tr. it. 99).
[62] Poincaré (1902a, tr. it. 101).

[63] Poincaré (1902a, tr. it. 97).
[64] Cassirer (1910, tr. it. 101)
[65] Poincaré fu uno dei pilastri della *Revue de métaphysique et de morale*. Come fece notare Laurent Rollet al Congresso della *Société Française d'Histoire des sciences et des techniques* tenutosi a Lille nel maggio 2001, il fatto che compaia un articolo di Poincaré persino nel primo numero della rivista, fa pensare che la collaborazione dello scienziato alla *Revue de métaphisique et de morale* non sia il frutto di un caso ma di una chiara volontà da parte di Elie Halévy e Xavier Léon, direttori della stessa, appoggiati da filosofi come Bergson e Boutroux.
[66] Andrade (1891).
[67] De Cyon (1901).
[68] Couturat (1901).
[69] Couturat (1896).
[70] Sull'influenza di Boutroux su Poincaré e sul movimento intellettuale sviluppatosi intorno a Boutroux e Tannery, si rimanda a Nye (1979).
[71] «Le sens de l'espace se réduit donc à une association constante entre certaines sensations et, certains mouvements, ou à la représentation de ces mouvements. (Est-il besoin, afin d'éviter une équivoque sans cesse renaissante, malgré mes explications réitérées, de répéter une fois de plus que j'entends par là non la représentation de ces mouvements dans l'espace, mais la représentation des sensations qui les accompagnent?)», Poincaré (1913,) trad. nostra.
[72] Poincaré (1905, trad. it. 61), corsivo dell'autore.
[73] «Donne ainsi une réponse précise et positive à la question de Berkeley: peut-on construire l'espace à partir des sensations non spatiales?» Vuillemin (1996, 282), trad. nostra.
[74] Già nel 1880, in un testo edito solo nel 1997, Poincaré scrive, come si è visto, che la geometria è «l'étude du groupe d'opérations formé par les déplacements que l'on peut faire subir à une figure sans la déformer». Poincaré (1997), trad. nostra.
[75] «La Géométrie n'est autre chose que l'étude d'un groupe et, en ce sens, on pourrait dire que la verité de la géométrie d'Euclide n'est pas incompatible avec celle de la géométrie de Lobatchevski, puisque l'existence d'un groupe n'est pas incompatible avec celle d'un autre groupe.» Poincaré(1887, 215), trad. nostra.
[76] «Si l'on envisage un certain nombre de transformations et qu'on les combine ensuite de toutes les manières possibles l'ensemble de toutes ces combinaisons formera ce qu'il appelle un groupe. A chaque groupe correspond une géométrie, et la nôtre, qui correspond au groupe des déplacements d'un corps solide, n'est qu'un cas très particulier.» Poincaré (1902b, 269) trad. nostra.
[77] Poincaré (1902a, tr. it. 87).
[78] Poincaré (1902a, tr. it. 117).
[79] Cassirer (1911-1920, tr. it. 76).
[80] Cassirer (1910).
[81] Poincaré (1902a, tr. it. 115).
[82] Poincaré (1902a, tr. it. 119).
[83] Una posizione differente a questo riguardo è ad esempio quella assunta da Federigo Enriques che, in esplicita polemica con Poincaré, sottolinea più volte come la Geometria debba essere intesa come parte della fisica: «Pertanto la Geometria anziché essere ritenuta come necessariamente precedente alla Fisica, viene ad esserne considerata una parte, assorta a un alto grado di perfezione in virtù della semplicità, della generalità e della relativa indipendenza dei rapporti in essa compresi». Enriques (1906, 158).
[84] Poincaré (1902a, tr. it. 117).
[85] Ibidem.
[86] Cassirer (1911-1920, 77-78).
[87] Poincaré (1905, tr. it. 155-156).
[88] Poincaré (1905, tr. it. 167-168), corsivo dell'autore.
[89] Si veda Le Roy (1901).
[90] Poincaré (1902a, tr. it. 5).
[91] « The role of experience in geometry is two-fold: geometrical concepts and assumptions *originate from experience*; from the status of idealised empirical generalisations geometrical assumptions are then elevated to the status of *conventional principles* or *terminological conventions*; moreover, in the *applications of metric geometry* we are *guided in our choice* of a system of metric geometry by its *simplicity* (in psychological, pragmatic and mathematical sense) and *convenience* but also by *empirical considerations* relevant to simplicity and convenience, for example, by our knowledge of the existence in

nature of solid bodies whose movements closely approximate the structure of the Euclidian group. » Giedymin (1892, 25-26), corsivo dell'autore, trad. nostra.

[92] Poincaré (1902a, tr. it. 211), corsivo dell'autore.

[93] Cfr. Poincaré (1902a, tr. it. 249).

[94] Kant (1781, tr. it. 65-92).

[95] Kant ammetteva la coerenza delle geometrie non euclidee, ma le riconosceva solo come possibilità logica: escludeva che esse facessero parte dell'esperienza possibile.

[96] «Such a classification cannot be accomplished without the active intervention of the mind, an dit is the object of this intervention to refer our sensations to a sort of rubric or category pre-existing in us», Poincaré (1898, 3), trad. nostra.

[97] «We have within us, in a potential form, a certain number of models of groups, and experience merely assist us in discovering which of these models departs least from reality» Poincaré (1898, 13), trad. nostra.

[98] Poincaré (1905, tr. it. 45-46).

[99] Cfr. Poincaré (1902a, tr. it.87)

[100] Poincaré (1902a, tr. it. 89).

[101] Poincaré (1902a, tr. it. 139).

[102] Poincaré (1902a, tr. it. 75).

[103] Cfr. Poincaré (1902a, tr. it. 119).